Mathématiques pour les Sciences (MS2)

Examen du 5 juin 2007 ($2^{\text{ème}}$ session), durée : 2 heures
Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisées

Exercice 1. (5 points)

(a) Décomposer la fraction suivante en éléments simples :

$$Q(x) = \frac{x^3}{x^2 + 3x + 2} .$$

(b) Calculer l'intégrale $\int_0^1 Q(x)\, dx$.

Exercice 2. (6 points) Considérons l'équation différentielle

$$x'' + 4x' + 4x = e^t \sin t . \tag{1}$$

(a) Trouver la solution générale de l'équation homogène

$$x'' + 4x' + 4x = 0 . \tag{2}$$

(b) Trouver une solution particulière de l'équation (1). En déduire la solution générale de l'équation (1).

(c) Trouver toutes les solutions de (1) vérifiant la condition initiale $x(0) = 0$.

Exercice 3. (10 points) Considérons la fonction

$$f(x, y) = \cos(x^2 + y^2) .$$

(a) Trouver le domaine de définition de f.

(b) Calculer les dérivées partielles (du premier ordre) de f.

(c) Montrer que les dérivées partielles de f sont continues comme fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

(d) Montrer que tout point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ de la forme suivante est un point critique pour f :

$$x = s, \quad y = \pm\sqrt{\pi k - s^2}, \tag{3}$$

où s est un réel et $k \geq 0$ est un entier tel que $\pi k \geq s^2$. Y-a-t-il d'autres points critiques?

(e) Calculer la matrice

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

et son déterminant. Peut-on en tirer des conclusions concernant le caractère (minimum, maximum, selle) des points critiques de f?

(f) Montrer qu'en chacun de ses points critiques la fonction f admet un extremum global.

Mathématiques pour les Sciences (MS2)

Corrigé de l'examen du 5 juin 2007

Solution de l'exercice 1. **(a)** On divise x^3 par $x^2 + 3x + 2$:

$$x^3 = (x-3)(x^2+3x+2) + 7x + 6.$$

Il s'ensuit que

$$Q(x) = x - 3 + R(x), \quad R(x) = \frac{7x+6}{(x+1)(x+2)}.$$

On cherche une décomosition de R en éléments simples :

$$R(x) = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+2}.$$

En multipliant cette égalité par $x+1$ et en prenant $x = -1$, on obtient $a = -1$. De même, en multipliant par $x+2$ et prenant $x = -2$, on obtient $b = 8$. On conclut que

$$Q(x) = x - 3 - \frac{1}{x+1} + \frac{8}{x+2}. \tag{4}$$

(b) On utilise la décomposition (4) :

$$\begin{aligned}\int_0^1 Q(x)\,dx &= \int_0^1 \Big(x - 3 - \frac{1}{x+1} + \frac{8}{x+2}\Big)\,dx \\ &= \Big[\frac{x^2}{2} - 3x - \ln(x+1) + 8\ln(x+2)\Big]_0^1 \\ &= 8\ln 3 - 9\ln 2 - \frac{5}{2}.\end{aligned}$$

□

Solution de l'exercice 2. **(a)** On cherche les racines du polynôme caractéristique :

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0.$$

Cette équation possède une racine double: $\lambda = -2$. Un théorème du cours donne que la solution générale de l'équation (2) est représentable sous la forme

$$x_g(t) = (a + bt)\,e^{-2t}, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

(b) La théorie générale assure l'existence d'une solution particulière de la forme

$$x_p(t) = (\alpha \sin t + \beta \cos t)\,e^t, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

En reportant (5) dans l'équation (1) et identifiant les termes devant $\sin t$ et $\cos t$, on obtient le système suivant pour α et β :

$$\begin{cases} 6\alpha + 8\beta = 0, \\ 8\alpha - 6\beta = 1. \end{cases}$$

Ce système possède une unique solution:

$$\alpha = \frac{2}{25}, \quad \beta = -\frac{3}{50}.$$

La solution générale de (1) a la forme

$$x(t) = x_g(t) + x_p(t) = (a + bt)\, e^{-2t} + \frac{4\sin t - 3\cos t}{50}\, e^t\,.$$

(c) On a :

$$x(0) = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad a - \frac{3}{50} = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad a = \frac{3}{50}.$$

Donc, les solutions vérifiant la condition $x(0) = 0$ sont données par la formule

$$y(t) = \Big(\frac{3}{50} + bt\Big)\, e^{-2t} + \frac{4\sin t - 3\cos t}{50}\, e^t\,, \quad b \in \mathbb{R}\,.$$

□

Solution de l'exercice 3. **(a)** La fonction f est définie sur $\mathbb{R}^2$.

(b) On a :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2x\sin(x^2 + y^2), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2y\sin(x^2 + y^2). \tag{6}$$

(c) La fonction $(x, y) \mapsto \sin(x^2 + y^2)$ est continue comme composition d'un polynôme avec sinus. Le produit de deux fonctions continues étant continu, on conclut que $\partial f/\partial x$ et $\partial f/\partial y$ sont continus sur $\mathbb{R}^2$.

(d) Considérons le système

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad\Longleftrightarrow\quad \begin{cases} 2x\sin(x^2 + y^2) = 0, \\ 2y\sin(x^2 + y^2) = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Un point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifie la première équation si et seulement si

$$x = 0 \quad \text{ou} \quad x^2 + y^2 = \pi k,$$

où $k \geq 0$ est un entier. De même, un point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifie la deuxième équation du système (7) si et seulement si

$$y = 0 \quad \text{ou} \quad x^2 + y^2 = \pi k.$$

On voit que si (x, y) est une point critique pour f, alors il existe un réel s et un entier $k \geq s^2/\pi$ tels que

$$x = s, \quad s^2 + y^2 = \pi k \quad\Longleftrightarrow\quad x = s, \quad y = \pm\sqrt{\pi k - s^2}\,.$$

Réciproquement, tout point de la forme (3) vérifie (7).

(e) On a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= -2\sin(x^2 + y^2) - 4x^2\cos(x^2 + y^2), \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= -4xy\cos(x^2 + y^2), \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= -2\sin(x^2 + y^2) - 4y^2\cos(x^2 + y^2). \end{aligned}$$

Donc,

$$H(x,y) = -2\begin{pmatrix} \sin(x^2+y^2) + 2x^2\cos(x^2+y^2) & 2xy\cos(x^2+y^2) \\ 2xy\cos(x^2+y^2) & \sin(x^2+y^2)+2y^2\cos(x^2+y^2) \end{pmatrix},$$

$$\det H(x,y) = 4\left(\sin^2(x^2+y^2) + 2(x^2+y^2)\sin(x^2+y^2)\cos(x^2+y^2)\right).$$

On voit que si $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ est un point critique pour f, alors $\det H(x,y) = 0$. Par conséquent, on ne peut pas déterminer le caractère des points critiques de f en étudiant $H(x,y)$.

(f) On note d'abord que $|f(x,y)| \leq 1$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. D'autre part, si (x_*, y_*) est un point critique, alors il existe un entier k tel que $x_*^2 + y_*^2 = \pi k$. Donc,

$$f(x_*, y_*) = \cos(\pi k) = \pm 1.$$

On voit que (x_*, y_*) est soit un maximum, soit un minimum global pour f. $\square$