L1-MS2 - 2006/2007
Examen du 10 mai 2007

Examen de Mathématiques pour les Sciences (MS2)

Durée: **3** heures
Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisées

Exercice 1 : On se propose de calculer la valeur de l'intégrale

$$I = \int_{-1}^{0} \frac{3x}{(x^2+x+1)(x+2)^2}\, \mathrm{d}x.$$

1. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle
$$\frac{3X}{(X^2+X+1)(X+2)^2}\,.$$
2. On rappelle que $\arctan(1/\sqrt{3}) = \pi/6$. Calculer
$$J_1 = \int_{-1}^{0} \frac{1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x \quad \text{puis} \quad J_2 = \int_{-1}^{0} \frac{x+1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x\,.$$
3. Calculer I.

Exercice 2 : Soit la fonction $f :]-\frac{1}{2}, \infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{x}{2}\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1+tx)\sqrt{1+2tx}}\,.$

1. Calculer, pour x fixé la dérivée $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sqrt{1+2tx}$.
2. En déduire qu'on peut mettre $f(x)$ sous la forme $\displaystyle\int_0^1 \frac{g_x'(t)}{1+g_x(t)^2}\,\mathrm{d}t$ où g_x est une fonction en t (dépendant du parametre x) qu'on trouvera.
3. En déduire que $f(x) = \arctan\sqrt{1+2x} - \dfrac{\pi}{4}$.
4. Calculer l'aire de la zone de $\mathbb{R}^2$ délimitée par le graphe de f, et les droites d'équation $x = 0$, $x = 1$ et $y = 0$. (Indication : IPP)

Exercice 3 : Soit l'équation différentielle :

$$\text{(E)} \qquad \big(\cos(2x)+3\big)y' + 2\sin(2x)\,y = \sin(-x).$$

1. Résoudre (E_0), l'équation sans second membre attachée à (E).
2. Appliquer la méthode de variation de la constante pour trouver une solution particulière de (E).
3. En déduire la solution générale de (E).
4. Trouver l'unique solution de (E) qui vérifie la condition initiale $y(0) = 0$.

Exercice 4 : Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = 3x^3 - 3x^2y + xy^2$.

1. Quel est son domaine de définition ? Est-elle continue sur ce domaine ?
2. Calculer ses dérivées partielles (qu'on notera par $f_x' \equiv \frac{\partial f}{\partial x}$ et $f_y' \equiv \frac{\partial f}{\partial y}$).
3. Montrer que le seul point critique de f est $(0,0)$.
4. Le point $(0,0)$ est-il un point d'extremum local de f ? (Justifier la réponse).
5. f atteint-t-elle des extremas globaux sur $\mathbb{R}^2$?

— **tourner la page** —

Exercice 5 : (exercice "bonus" : 5 pts.)
On se propose de résoudre l'équation différentielle (non-linéaire) :

$$(\mathrm{E}_1) : \qquad y''' + (3y'' + 1)y' + (y')^3 = \mathrm{e}^{-y} \sin x$$

1. Montrer qu'en faisant le changement de fonction inconnue $z = y'\mathrm{e}^y$ on obtient l'equation

$$(\mathrm{E}_2) : \qquad z'' + z = \sin x.$$

2. Résoudre d'abord $z'' + z = 0$.
3. Trouver une solution particulière de (E_2) et écrire ensuite sa solution générale.
4. En déduire une solution de (E_1).

Barème indicatif : 25 pts. dont 5 pts. pour l'Exercice "bonus" no. 5
Nota bene : Réponses concises + trêve au bla-bla = temps épargné + correcteur bienveillant