Corrigé de l'examen L1-MS2 du 10 mai 2007

EXO1 : ① Notons $F(X) = \dfrac{3X}{(X^2+X+1)(X+2)^2}$. La décomposition "a priori" est :

$$F(X) = \frac{A}{X+2} + \frac{B}{(X+2)^2} + \frac{CX+D}{X^2+X+1}.$$ On cherche A, B, C, D :

- $\left[(X+2)^2 F(X)\right]_{X=-2} = \dfrac{3(-2)}{3} = -2$ et $= B$ $\Rightarrow$ $\boxed{B=-2}$ (1)
- $\lim\limits_{x\to\infty} xF(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2}{(x^2+x+1)(x+2)^2} = 0$ et $= A + C$ $\Rightarrow$ $\boxed{A+C=0}$ (2)
- On pose $X=0$ et on obtient : $\dfrac{A}{2} + \dfrac{B}{4} + D = 0 \Leftrightarrow \boxed{2A+B+4D=0}$ (3)
- On pose $X=-1$ et on obtient : $\boxed{A+B-C+D=-3}$ (4)

Donc en tenant compte de (1) & (2) on obtient : $\begin{cases} A+2D=1 \\ 2A+D=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A+D=0 \\ A-D=-2 \end{cases}$

d'où $\boxed{A=-1}$; $\boxed{B=-2}$; $\boxed{C=D=1}$. Donc

$$\boxed{F(X) = -\frac{1}{X+2} - \frac{2}{(X+2)^2} + \frac{X+1}{X^2+X+1}}$$

② $J_1 = \displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}\left[\operatorname{Arctg}\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)\right]_{-1}^{0} = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{6} - \left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$

$J_2 = \displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}dx + \frac{1}{2}J_1 = \underbrace{\frac{1}{2}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{t\,dt}{t^2+\frac{3}{4}}}_{=0} + \frac{1}{2}J_1$

$=0$ car la fonction à intégrer est impaire et l'intervalle est symétrique

Donc $J_2 = \frac{1}{2}J_1 = \dfrac{\pi}{3\sqrt{3}}$

③ On a : $K_1 = \displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{dx}{x+2} = \big[\ln|x+2|\big]_{-1}^{0} = \ln 2$

$K_2 = \displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{dx}{(x+2)^2} = -\left[\frac{1}{x+2}\right]_{-1}^{0} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

Comme $I = -K_1 - 2K_2 + J_2$, on a finalement

$$\boxed{I = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} - (\ln 2 + 1)}.$$

EXO2 : Obs : Remarquer que $f(x)$ est bien définie : quand $x \in \left]-\frac{1}{2}, 0\right]$, $1+2tx \in [1+2x, 1] \subset]0,\infty[$ lorsque $t \in [0,1]$ et quand $x > 0$ on a $1+2tx \in [1, 1+2x] \subset [1,\infty[$ lorsque $t\in[0,1]$.

① $\dfrac{d}{dt}(1+2tx)^{1/2} = \dfrac{1}{2}(1+2tx)^{-1/2}\cdot 2x = \dfrac{x}{\sqrt{1+2tx}}$

② En effet, si on pose $g_x(t) = \sqrt{1+2tx}$ on a :
$1+g_x(t)^2 = 1+1+2tx = 2(1+tx)$ et d'après (1) : $g'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+2tx}}$.

③ D'après (2) : $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{g_x'(t)}{1+g_x(t)^2}dt = \big[\arctan g_x(t)\big]_0^1 =$

$= \arctan g_x(1) - \arctan g_x(0) = \arctan\sqrt{1+2x} - \underbrace{\arctan 1}_{=\pi/4}$.

④ L'aire en question est $A = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \arctan\sqrt{1+2x}\,dx - \frac{\pi}{4}$

$\overset{\text{IPP}}{=} \big[x\arctan\sqrt{1+2x}\big]_0^1 - \displaystyle\int_0^1 x\left(\arctan\sqrt{1+2x}\right)'dx - \frac{\pi}{4} =$

$= \arctan\sqrt{3} - \dfrac{\pi}{4} - \displaystyle\int_0^1 \frac{x\left(\sqrt{1+2x}\right)'}{1+\left(\sqrt{1+2x}\right)^2}dx \overset{x=(x+1)-1}{=}$

$= \dfrac{\pi}{12} - \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+2x}} + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+2x}} = \frac{\pi}{12} + \underbrace{f(1)}_{=\pi/12} - \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\sqrt{1+2x}\right)'dx$

$\Rightarrow \boxed{I = \dfrac{\pi}{6} - \dfrac{1}{2}(\sqrt{3}-1)}$ Obs : $I > 0$ (car $f \geq 0$ sur $[0,1]$)

EXO3 : ① : (E_0) $(\cos 2x + 3)y' + 2\sin 2x \cdot y = 0$

Obs : $\cos 2x + 3 = 2\cos^2 x - 1 + 3 = 2(\cos^2 x + 1)$. Donc

$(E_0) \Leftrightarrow y' + \dfrac{\sin 2x}{1+\cos^2 x}y = 0$

dont la sol. générale est : $y_0 = \lambda e^{-\int\left(+\frac{\sin 2x}{1+\cos^2 x}\right)dx} = \lambda e^{+\int\frac{(\cos^2 x+1)'}{\cos^2 x+1}dx}$

$\Rightarrow y_0(x) = \lambda(1+\cos^2 x)$ définie sur tout $\mathbb{R}$.

② Variation de la cte pour $y' + ay = b$: on propose $y_p = \lambda y_0$ comme sol. particulière (où y_0 est sol. de (E_0) et λ une fonction inconnue). Alors $\lambda' y_0 + \lambda(\underbrace{y_0' + a y_0}_{=0}) = b \Rightarrow \lambda(x) = \displaystyle\int \frac{b}{y_0}$. Dans notre cas

$b(x) = \dfrac{-\sin x}{2(1+\cos^2 x)}$ et $y_0(x) = 1+\cos^2 x$, donc $\lambda(x) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int \frac{(\cos x)'}{(1+\cos^2 x)^2}dx \overset{y=\cos x}{=}$

$= \dfrac{1}{2}\displaystyle\int \frac{dy}{(1+y^2)^2} = \frac{1}{2}I_2(y)$. (On note $\forall n \in \mathbb{N}$: $I_n(y) = \displaystyle\int \frac{dy}{(1+y^2)^n}$)

CORRIGÉ EXAMEN

L1-MS2 - 2006-2007 - SESSION 1

Alors, sachant que $I_1(y) \equiv \int \frac{dy}{1+y^2} = \arctan y + C$, on se propose de trouver $I_2(y)$ par IPP :

$$I_2(y) = \int \frac{dy}{(1+y^2)^2} = \int \frac{\cancel{(1+y^2)}\,dy}{(1+y^2)^{\cancel{2}}} - \int \frac{y^2 dy}{(1+y^2)^2} = I_1 - \frac{1}{2}\int y \frac{(1+y^2)'}{(1+y^2)^2} dy$$
$$= I_1 + \frac{1}{2}\int y \left(\frac{1}{1+y^2}\right)' dy \underset{IPP}{=} I_1 + \frac{1}{2}\frac{y}{1+y^2} - \frac{1}{2}\int \frac{dy}{1+y^2} =$$
$$= \frac{I_1}{2} + \frac{1}{2}\frac{y}{1+y^2}.$$

Donc $\lambda(x) = \frac{1}{2} I_2(y)\Big|_{y=\cos x} = \frac{1}{4}\left(\arctan(\cos x) + \frac{\cos x}{1+\cos^2 x}\right)$.

Donc la sol. particulière recherchée est :

$$y_p(x) = \frac{1}{4}\left((1+\cos^2 x)\arctan(\cos x) + \cos x\right).$$

(3) La sol. générale de (E) est : $y = y_0 + y_p$. Donc

$$y(x) = \frac{1}{4}\left((1+\cos^2 x)(\arctan(\cos x) + \lambda) + \cos x\right) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

(4) $y(0) = 0 \iff \frac{1}{4}\left(2\cdot\left(\frac{\pi}{4}+\lambda\right) + 1\right) = 0 \iff \lambda = -\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+1\right)$

La sol. unique recherchée sera donc :

$$y(x) = \frac{1}{4}\left((1+\cos^2 x)\left(\arctan(\cos x) - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+1\right)\right) + \cos x\right).$$

EXO 4 :

$$f(x,y) = 3x^3 - 3x^2 y + xy^2$$

1. $D_f = \mathbb{R}^2$. Oui.
2. $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 9x^2 - 6xy + y^2 = (3x-y)^2$

   $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -3x^2 + 2xy$
3. $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \iff 3x = y$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \iff x = 0$ ou $2y = 3x$

(Obs : logique : $p \wedge (q_1 \vee q_2) \iff (p\wedge q_1) \vee (p \wedge q_2)$, donc (x,y) est point critique de f ssi $(3x = y$ et $x = 0)$ ou $(3x = y$ et $2y = 3x)$

$\iff (x,y) = (0,0)$ ou ... la m̂ chose.

4. $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ (car f est C^2) et c'est $= -2(3x-y)$

   $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6(3x-y)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x$

$$\Rightarrow D_f(0,0) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\end{vmatrix}(0,0) = 0$$

donc on ne peut décider du comportement de f qu'en faisant une étude "à la main".

Or, $f(x,0) = 3x^3$, qui est strictement croissante. Donc $(0,0)$ n'est ni min, ni max local.

5. Si $y = 1$ (par exemple) on a : $\lim_{x\to\pm\infty} f(x,y) = \pm\infty$. Donc on n'a pas d'extremas globaux (qui soient atteints dans des points de $\mathbb{R}^2$.)

EXO 5 :

(1) : $z'' + z = (y''e^y + (y')^2 e^y)' + y'e^y = (y''' + 3y'y'' + (y')^3)e^y + y'$

(2) Sol. de $z'' + z = 0$: éq. caract $\Rightarrow r^2+1 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \pm i$: $z_0 = A\cos x + B\sin x$

(3) Le m. de droite est $\mathrm{Im}(e^{ix})$ donc $m = i = r_1$. On cherche donc une sol. part. z_p sous la forme : $z_p = (ax+b)(A\cos x + B\sin x)$ car $d°(ax+b) = 1 = 1$ degré plus grand que

Après calculs, on déduit $\underline{z_p = -\frac{x}{2}\cos x}$. Donc la sol. gén. de (E_2) est :

$$\boxed{z = A\cos x + B\sin x - \frac{x}{2}\cos x}$$

(4) On a $y'e^y = z \iff (e^y)' = z$ donc en intégrant par "séparation des variables" : $\int (e^y)' dy = \int \left(A\cos x + B\sin x - \frac{x}{2}\cos x\right) dx$

$\iff e^y = \left|\left(A - \frac{x}{2}\right)\sin x + (1-B)\cos x\right| \underset{+C}{\Longrightarrow} y = \ln\left|\left(A-\frac{x}{2}\right)\sin x + (1-B)\cos x\right.$

$+ ($