L1-MS2
Première année, 2005/2006
Examen du 14 juin 2006

Examen de Mathématiques pour les Sciences (MS2)
Session de rattrapage

Durée: **2** heures
Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés
Le barème est donné à titre indicatif

Exercice 1 : (10 pts.)
Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x(1+\tan^2 x)\,\mathrm{d}x \qquad I_2 = \int_0^1 \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x,$$
$$I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}x}{1-\sin x} \qquad I_4 = \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{\frac{1}{x}-1}\right)\mathrm{d}x.$$

Exercice 2 : (5 pts.)

1. Résoudre l'équation différentielle :
$$y'' - 2y' + 2y = 0 \qquad (\mathrm{E}_0)$$
On demande de donner les solutions à valeurs réelles (mais on peut utiliser les nombres complexes dans les calculs).
2. Trouver une solution particulière à :
$$y'' - 2y' + 2y = \sin x \qquad (\mathrm{E})$$
3. Déterminer la solution de l'équation (E) qui vérifie $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Exercice 3 : (7 pts.)
Une entreprise doit construire, à moindre frais, une boîte rectangulaire sans couvercle dont le volume doit être $V = 18$ m^3. Le fond de cette boîte doit être fait d'un matériau plus résistant que celui des parois latérales, donc plus coûteux ; en effet, le coût du mètre carré de fond de boîte est de 4 euros et celui de paroi latérale est de 3 euros. Notons par C la fonction "coût de la boîte" et par x, y, z ses dimensions (en mètres), z étant sa hauteur et x et y étant les largeur et longueur du fond rectangulaire de la boîte.
(Dorénavant on n'indiquera pas les unités de mesure : mètres, euros, etc. . .)

1. Ecrire la fonction coût C en tant que fonction des variables x, y, z.
2. En supposant maintenant que le volume de la boîte vaut 18, montrer que la fonction coût $C(x, y, z)$ peut s'exprimer en fonction des deux variables x et y seulement. On notera cette fonction $F(x, y)$.
3. Soit maintenant la fonction $f(x, y) = xy + \dfrac{27}{x} + \dfrac{27}{y}$.
   (a) Calculer les dérivées partielles premières de celle-ci.
   (b) Calculer ses points critiques.
   (c) Trouver le point de $\mathbb{R}^2$ où elle atteint un minimum (justifier que s'en est bien un !).
4. En faisant la liaison entre f et F en déduire la conclusion : quelles sont les dimensions de la boîte la moins coûteuse et combien coûte-t-elle ?