L1-MS2
Première année, 2005/2006
Examen du 17 mai 2006

Examen de Mathématiques pour les Sciences (MS2)

Durée: **3** heures
Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisées
Le barème est donné à titre indicatif

Exercice 1 : Soit la fonction $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ définie par la fraction rationnelle :

$$f(x) = \frac{x(x-1)(x^2+x+2)}{(x+1)(x^2+1)^2}.$$

1. Donner la factorisation dans $\mathbb{C}$ du dénominateur de f.
2. Ecrire la forme “a priori” de la décomposition de f en éléments simples sur $\mathbb{R}$ (i.e. sans avoir calculé les coefficients de cette decomposition).
3. Ecrire la forme “a priori” de la décomposition de f en éléments simples sur $\mathbb{C}$.
4. Décomposer f en éléments simples sur $\mathbb{R}$ (autrement dit, trouver les valeurs numériques des coefficients de la décomposition a priori sur $\mathbb{R}$).
   (Indication : on peut se faciliter partiellement la tâche en remarquant que $x^2 + x + 2$ s’ecrit comme $(x^2 + 1) + (x + 1)$).
5. Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{x+1}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x$.
   (Indication : on peut penser, entre autres, à des changements de variable trigonométriques)
6. En déduire des questions précédentes la valeur de l’intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 2 :

1. Montrer que $\mathrm{e}^x \geq 1 + x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. En déduire l’inégalité :
   $$\frac{2}{3} \leq \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^{t^2}} \leq \frac{\pi}{4}.$$
   (Indication : faire deux choix convenables pour x dans l’inégalité de la première question).

Exercice 3 : On se propose de calculer, pour $n \in \mathbb{N}$, les intégrales du type :

$$I_{2n} = \int_0^1 x^{2n}\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

1. Montrer que $I_0 = \frac{\pi}{4}$. (Indication : on peut envisager un changement de variable trigonométrique, ou bien un changement du type de Euler . . .)
2. Montrer qu’on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la récurrence :
   $$I_{2n} = \frac{2n-1}{2n+2} I_{2n-2}.$$
   (Indication : IPP)

3* En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$I_{2n} = \frac{(2n)!}{(n+1)\cdot(n!)^2\cdot 2^{2n}}\cdot\frac{\pi}{4}.$$

— tournez la page —

Exercice 4 : On considère l'équation différentielle

$$y' + y = g(x)\, e^{-x} \qquad \text{(E)}$$

avec une certaine fonction continue donnée $g(x)$, définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.

1. Déterminer la solution générale de l'équation suivante :

$$y' + y = 0 \qquad (\text{E}_0)$$

2. Déterminer, par la variation de la constante, la solution de (E) vérifiant la condition initiale $y(0) = 0$.
3.* On suppose que la fonction g est bornée, c'est-à-dire : $\exists M\ \forall x\ |g(x)| \leq M$. Montrer que toute solution de l'équation différentielle (E) vérifie : $\lim_{x\to+\infty} y(x) = 0$.

Exercice 5 : Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^2 - 4xy + y^3 + 4y$.

1. Quel est son domaine de définition ? Est-elle continue sur ce domaine ?
2. Calculer ses dérivées partielles (qu'on notera par $f'_x \equiv \frac{\partial f}{\partial x}$ et $f'_y \equiv \frac{\partial f}{\partial y}$).
3. Montrer que les seuls points critiques de f sont $(4, 2)$ et $(\frac{4}{3}, \frac{2}{3})$.
4. Montrer qu'en $(4, 2)$, f a un minimum local.
5. Montrer qu'en $(\frac{4}{3}, \frac{2}{3})$, f a un point de selle.
6. Le minimum local atteint de f en $(4, 2)$ est-il un minimum global ?
7. Quelle est la valeur du maximum global de f ?

Barème indicatif : Total = 25 points.
Les questions marquées par un astérisque sont un tout petit peu plus difficiles.
Nota bene : Réponses concises + trêve au bla-bla = temps épargné + correcteur bienveillant