CORRIGÉ de l'EXAMEN de MATHEMATIQUES-~~BI~~SCIENCES (MS2)

2ème SESSION 2005-2006

(14 juin 2006)

EXERCICE 1 :

- $I_1 = \int_0^{\pi/4} \tan x \cdot \tan' x \, dx = \left[\frac{\tan^2 x}{2}\right]_0^{\pi/4} = \frac{\tan^2\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2} = \boxed{\frac{1}{2} = I_1}$

- $I_2 \equiv \int_0^1 e^{\sqrt{x}} dx \underset{\uparrow}{=} 2\int_0^1 e^t t \, dt \overset{IPP}{=} 2\left[e^t t\right]_0^1 - 2\int_0^1 e^t dt =$

$\sqrt{x} = t \Rightarrow x = t^2 \Rightarrow dx = 2t\,dt$

$= 2e - 2(e-1) = 2 \Rightarrow \boxed{I_2 = 2}$

- $I_3 = \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{1 - \frac{2tg\,x/2}{1+tg^2 x/2}} = \int_0^{\pi/4} \frac{2tg' x/2}{\left(1-tg\frac{x}{2}\right)^2} dx \underset{\uparrow}{=} 2\int_0^{tg\frac{\pi}{8}} \frac{dt}{(1-t)^2} =$

$t = tg\frac{x}{2}$

$\left(tg\frac{x}{2}\right)' = \frac{1}{2}\left(1+tg^2\frac{x}{2}\right)$

$= -2\left[\frac{1}{t-1}\right]_0^{tg\pi/8} = \frac{2}{1-tg\pi/8} - 2 = \boxed{\frac{2tg\pi/8}{1-tg\pi/8} = I_3}$

- $I_4 = \int_{1/2}^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} + \int_{1/2}^1 \sqrt{\frac{1}{x}-1}\, dx \equiv \cancel{2}\frac{1}{\cancel{2}}\int_{1/2}^1 \left(\sqrt{x}\right)' dx + \tilde{I}_4 \Rightarrow$

$= \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \tilde{I}_4$.

Pour $\tilde{I}_4$ on fait le chgt de var. $\sqrt{\frac{1}{x}-1} = t \Rightarrow \frac{1}{x} - 1 = t^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{1}{t^2+1} \Rightarrow dx = -\frac{2t}{(t^2+1)^2} dt$, d'où :

$\tilde{I}_4 = -\int_1^0 t \cdot \frac{2t}{(t^2+1)^2} dt = 2\int_0^1 \frac{t^2+1-1}{(t^2+1)^2} dt =$

$= 2\int_0^1 \frac{dt}{t^2+1} - 2\int_0^1 \frac{dt}{(t^2+1)^2} = 2\left(\left[\operatorname{arctg} t\right]_0^1 - \tilde{I}_4'\right)$

Pour calculer $\tilde{I}_4' \equiv \int_0^1 \frac{dt}{(t^2+1)^2}$, on fait le chgt de var :

$t = tg\,x \Rightarrow dt = 1 + tg^2 x$ d'où

$I_4' = \int_0^{tg 1} \frac{dx}{1+tg^2 x} = \int_0^{tg 1} \cos^2 x \, dx = \int_0^{tg 1} \frac{1+\cos 2x}{2} =$

$= \frac{1}{2}\left(tg 1 + \frac{1}{2}\sin(tg 1)\right)$.

Conclusion : $\boxed{I_4 = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{\pi}{2} - \left(tg 1 + \frac{1}{2}\sin(tg 1)\right)}$

EXERCICE 2 :

(1.) Eq. caract. attachée à (E_0) : $r^2 - 2r + 2 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = 1 \pm i$.
Les racines sont donc purement complexes et alors la sol. générale est du type (on tient compte de $r_1 = \overline{r_2} \equiv \rho$)

$y_0 = \alpha e^{r_1} + \beta e^{r_2} = e^{(Re\rho)\cdot x}\left(\alpha e^{i(Im\rho)x} + \beta e^{-i(Im\rho)x}\right)$

avec $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ et comme on cherche des solutions réelles seulement, on pose la condition $y_0 = \overline{y_0}$ qui conduit à $\alpha = \overline{\beta}$. Posons alors $\alpha = A + iB$ dans y_0. On déduit finalement : $y_0(x) = 2e^x(A\cos x - B\sin x)$, $\forall A, B \in \mathbb{R}$

Mais A et B sont quelconques, donc le 2 et le moins ne comptent pas. En conclusion :

$\boxed{y_0(x) = e^x(A\cos x + B\sin x)}$ $\forall A, B \in \mathbb{R}$

Obs : Si l'étudiant voit que $\Delta < 0$ et écrit la sol. gén. pour ce cas, alors c'est bien aussi.

(2) On propose une solution particulière du type $\tilde{y}(x) = A\sin ax + B\cos ax$ avec $a = 1$ (choix dicté par le m. de droite, qu'on peut voir comme $Im\, e^{ix}$).
En remplaçant dans (E) on a, tenant compte de :
$\tilde{y}' = A\cos x - B\sin x$ et $y'' = -A\sin x - B\cos x$,
l'identité (donc $\forall x$) :

$\cancel{-A\sin x} \cancel{- B\cos x} - 2A\cos x + 2B\sin x + \cancel{2}A\sin x + \cancel{2}B\cos x = \sin x$

$\Leftrightarrow \sin x(A + 2B - 1) + \cos x(B - 2A) = 0 \quad \forall x \Leftrightarrow$

$$\iff \begin{cases} A+2B=1 \\ -2A+B=0 \end{cases} \iff \begin{cases} B=2A \\ 5A=1 \end{cases} \Rightarrow A=\frac{1}{5} \text{ et } B=\frac{2}{5}.$$

Donc $\tilde{y}(x) = \frac{1}{5}(\sin x + 2\cos x)$.

(3) Sol. gén. de (E) : $y = y_0 + \tilde{y}$. Alors

$$(*)\begin{cases} y(0)=0 & \iff e^0(A+B\cdot 0)+\frac{1}{5}(0+2\cdot 1)=0 \iff A+\frac{2}{5}=0 \\ y'(0)=1 & \iff \left[e^x\left(A(\cos x-\sin x)+B(\sin x+\cos x)\right)+\frac{1}{5}(\cos x-2\sin x)\right]_{x=0}=1 \\ & \iff A+B+\frac{1}{5}=1 \end{cases}$$

d'où $A=-\frac{2}{5}$ et $B=\frac{6}{5}$. En conclusion, l'unique sol. y vérifiant les cond. initiales (*) est la suivante :

$$\boxed{y(x) = \frac{2}{5}e^x(3\sin x-\cos x)+\frac{1}{5}(\sin x-2\cos x)}$$

EXERCICE 3 :

1. $C(x,y,z) = 4\cdot xy + 3\cdot 2(x+y)z$

2. $V=18$ et $V=xyz \Rightarrow z=\frac{18}{xy}$ (les cas $x=0$ ou $y=0$ sont bien sûr à éliminer). Alors :

$$C\left(x,y,\frac{18}{xy}\right) \equiv F(x,y) = 4\left(xy+27\frac{x+y}{xy}\right)$$

3 (a) $f'_x(x,y) = y-\frac{27}{x^2}$; $f'_y(x,y)=x-\frac{27}{y^2}$.

(b) (x,y) point critique $\iff f'_x(x,y)=f'_y(x,y)=0 \iff$

$$\iff \begin{cases} x^2y=27 \\ xy^2=27 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy(x-y)=0 \\ x^2y=27 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=y \\ x^3=3^3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=3 \end{cases} \Rightarrow \text{Il y a un seul pt. critique : } (3,3).$$

(c) On a $f : \mathbb{R}_+^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}_+$ donc la valeur minimale de f est atteinte en $(3,3)$, si celui-ci est un minimum local. On calcule les dérivées secondes de f :

$f''_{xx}(x,y) = \frac{2\cdot 3^3}{x^3}$; $f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y) = 1$

$f''_{yy}(x,y) = \frac{2\cdot 3^3}{y^3}$. Donc

$$\Delta = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{2\cdot 3^3}{x^3} & 1 \\ 1 & \frac{2\cdot 3^3}{y^3} \end{vmatrix} = \frac{2^2\cdot 3^6}{x^3y^3}-1$$

Pour $(x,y)=(3,3)$: $\Delta(3,3) = 2^2-1 = 3>0$.

Aussi, $f''_{xx}(3,3) = 2>0$. Donc $(3,3)$ est bien un minimum local de f, le seul d'ailleurs.

(4) On voit que $F=4f$, donc la boîte la moins coûteuse est obtenue pour $x=y=3m$ et z on le trouve de $z=\frac{V}{xy}=\frac{18}{3\cdot 3}=2m$.

Son coût est de :

$$C(3,3,2) = 4\cdot 9+3\cdot 2\cdot 6\cdot 2 = 144 \text{ euros}.$$

et c'est la moins chère boîte qu'on peut obtenir. Par ailleurs, remarquer qu'elle est bien solide : elle a un fond carré, donc elle est bien stable devant tout coup de vent intempestif, elle est plutôt trapue car $z=2<x=y=3$, donc franchement, c'est stable même à des raffales assez vilaines. C'est du bon, quoi ! ... Et pour pas cher. 144 euros, c'est rien de nos jours... Franchement !