CORRIGÉ de l'EXAMEN de MS2 du 17 mai 2006.

EXERCICE 1 :

① $(x+1)(x^2+1)^2 = (x+1)(x+i)^2(x-i)^2$.

② Obs : $d^\circ f = (2+1+1)-(1+2^2) = 4-5 = -1 < 0$ donc la partie entière de la fraction rationnelle f est nulle. On a sur $\mathbb{R}$:
$$f(x) = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2} \quad \text{où } A,B,C,D,E \in \mathbb{R}.$$

③ $$f(x) \underset{(1)}{=} \frac{\alpha}{x+1} + \frac{\beta}{x+i} + \frac{\gamma}{x-i} + \frac{\tilde\beta}{(x+i)^2} + \frac{\tilde\gamma}{(x-i)^2} \quad \text{où } \alpha,\beta,\gamma,\tilde\beta,\tilde\gamma \in \mathbb{C}$$

④ Soit on trouve les coeffs. (inconnus) des expressions de (2) ou (3), soit on suit l'indication donnée, et on a alors :
$$f(x) = \underbrace{\frac{x(x-1)}{(x^2+1)^2}}_{g(x)} + \underbrace{\frac{x(x-1)}{(x+1)(x^2+1)}}_{h(x)} \quad \text{et on a :}$$
$$g(x) = \frac{ax+b}{x^2+1} + \frac{cx+d}{(x^2+1)^2} \quad \text{et} \quad h(x) = \frac{s}{x+1} + \frac{tx+r}{x^2+1}$$
Il s'agit de calculer $a,b,c,d,s,t,r \in \mathbb{R}$. On a :

- Pour g :
  - $\lim_{x\to\infty} x\,g(x) = \begin{cases} =0 \\ =a \end{cases}$, d'où $\underline{a=0}$
  - $[g(x)\cdot(x^2+1)^2]_{x=\pm i} = \begin{cases} = \pm i(\pm i - 1) \\ = 0 + (c(\pm i)+d) \end{cases} \Rightarrow$
    $\xrightarrow{(\pm i)(\pm i)=1}$ $c + (\mp i)d = \pm i - 1 \Rightarrow \begin{cases} c=-1 \\ d=-1 \end{cases}$
  - $g(0) = \begin{cases} =0 \\ = b+d \end{cases} \Rightarrow \underline{b=1}$
- Pour h :
  - $[h(x)\cdot(x+1)]_{x=-1} = \begin{cases} 1 \\ s \end{cases} \Rightarrow \underline{s=1}$
  - $\lim_{x\to\infty} x\,h(x) = \begin{cases} =1 \\ = s+t \end{cases} \Rightarrow s+t=1 \Rightarrow \underline{t=0}$
  - $h(0) = \begin{cases} =0 \\ s+r \end{cases} \Rightarrow \underline{r=-1}$

Donc : $$f(x) = g(x)+h(x) = \cancel{\frac{1}{x^2+1}} - \frac{x+1}{(x^2+1)^2} + \frac{1}{x+1} - \cancel{\frac{1}{x^2+1}} \quad (*)$$
donc dans (2) on a : $A=1$ et $B=C=-1$.

⑤ $$\int_0^1 \frac{x+1}{(x^2+1)^2}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x\,dx}{(x^2+1)^2} + \int_0^1 \frac{dx}{(x^2+1)^2}.$$
La première intégrale vaut $\int_0^1 \frac{(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}dx = -\left[\frac{1}{x^2+1}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$

Notons la deuxième par J et faisons le chmt. de variable $x = \tan t$ (d'où $dx = \frac{dt}{\cos^2 t}$, et les nouvelles bornes : 0 et $\pi/4$) :
$$J = \int_0^{\pi/4} \cos^2 t\,dt = \int_0^{\pi/4} \frac{\cos 2t+1}{2}dt = \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2}\cos y\,dy + \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4} =$$
$$= \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2} + [\sin y]_0^{\pi/2}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2}+1\right) = \frac{\pi+2}{8}.$$
Conclusion : $$\int_0^1 \frac{x+1}{(x^2+1)^2}dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2}+1\right) = \frac{\pi+4}{8}.$$
(Obs : On aurait pu calculer J par parties aussi : $\int \cos^2 = \int \cos(\sin)' \ldots$)

⑥ $$\int_0^1 f(x)dx \overset{(*)}{=} \int_0^1 \frac{dx}{1+x} - \int_0^1 \frac{x+1}{(x^2+1)^2}dx =$$
$$\underset{(5)}{=} [\ln(1+x)]_0^1 - \frac{4+\pi}{8} = \ln 2 - \frac{4+\pi}{8}.$$
■

EXERCICE 2 :

① Soit $f(x) = e^x - x - 1$. On a : $f'(x) = e^x - 1$ d'où $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$. En faisant le tableau de variation de f on déduit qu'elle est ≥ 0 $\forall x \in \mathbb{R}$, d'où l'inégalité.

② • On choisit $x = t^2$, d'où $e^{t^2} \geq t^2+1$ i.e. $0 \leq e^{-t^2} \leq \frac{1}{1+t^2}$
$$\Rightarrow \int_0^1 e^{-t^2}dt \leq \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = [\arctan t]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$
• On choisit $x = -t^2$, d'où $e^{-t^2} \geq 1 - t^2 \geq 0$ si $t\in[0,1]$

Donc $$\int_0^1 (1-t^2)dt \leq \int_0^1 e^{-t^2}dt \Leftrightarrow \underbrace{1 - \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1}_{=2/3} \leq \int_0^1 e^{-t^2}dt$$
■

EXERCICE 3 :

① $I_0 = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$ et si on pose $x = \sin t$ on a :

$$I_0 = \int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos^2 t}\cdot \cos t\,dt = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\,dt = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos 2t + 1}{2}\,dt$$

$$= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}\left[\sin 2t\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}. \text{ Donc } \boxed{I_0 = \pi/4}$$

② $I_{2n} = \int_0^1 x^{2n-1}\cdot x\sqrt{1-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 x^{2n-1}\cdot(1-x^2)'\sqrt{1-x^2}\,dx$

Mais en posant $u = 1-x^2$ on a $\int u'\sqrt{u} = \frac{2}{3}u^{3/2}$, donc

$(1-x^2)'\sqrt{1-x^2} = \frac{2}{3}\left((1+x^2)^{3/2}\right)'$, d'où :

$$I_{2n} = -\frac{1}{3}\int_0^1 x^{2n-1}\cdot\left((1-x^2)^{3/2}\right)'dx \overset{IPP}{=}$$

$$= -\frac{1}{3}\left[x^{2n-1}(1-x^2)^{3/2}\right]_0^1 + \frac{2n-1}{3}\int_0^1 x^{2n-2}(1-x^2)^{3/2}dx$$

$$= 0 + \frac{1}{3}(2n-1)\int_0^1 x^{2n-2}(1-x^2)\sqrt{1-x^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{3}(2n-1)\left[\int_0^1 x^{2(n-1)}\sqrt{1-x^2}\,dx - \int_0^1 x^{2n}\sqrt{1-x^2}\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{3}(2n-1)\left(I_{2(n-1)} - I_{2n}\right)$$

Donc

$$I_{2n}\left(1 + \frac{2n-1}{3}\right) = \frac{2n-1}{3}I_{2n-2}$$

d'où la relation de récurrence demandée.

③ On a, par récurrence :

$$I_{2n} = \frac{2n-1}{2(n+1)}\cdot\frac{2(n-1)-1}{2n}\cdots\cdots\frac{2(n-(n-1))-1}{2(n-(n-1)+1)}\cdot I_{2(n-(n-1))-1-1} =$$

$$= \frac{(2n-1)\cdot(2n-3)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 1}{2^n(n+1)n\cdot\ldots\cdot 2} I_0 \text{ (on "remplit les trous")}$$

$$= \frac{\boxed{2n}\cdot(2n-1)\cdot\boxed{2(n-1)}\cdot(2n-3)\cdot\ldots\cdot 3\cdot\boxed{2}\cdot 1}{2n\cdot 2(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 2^n n!\cdot(n+1)} I_0 = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(n+1)}\cdot\frac{\pi}{4}$$

EXERCICE 4 : Eq. diff. d'ordre I : $y' + a(x)y = b(x)$ (*)

① On sait que l'éq. sans second membre attachée à (*) a la solution $y_0(x) = \lambda\exp\left(-\int_0^x a(t)dt\right)$. Notre cas : $a(x) = 1$, d'où $\underline{y_0(x) = \lambda e^{-x}}$ $\forall\lambda\in\mathbb{R}$.

② On propose $y(x) = \lambda(x)e^{-x}$, qu'on remplace dans (E) :

$$\lambda' e^{-x} - \cancel{\lambda e^{-x}} + \cancel{\lambda e^{-x}} = g e^{-x} \underset{e^{-x}\neq 0\,\forall x}{\Longleftrightarrow} \lambda' = g.$$

Donc la fonction λ recherchée est une primitive $G(x) = \int_0^x g(t)dt + \mu$ de g (qui admet des primitives, car continue par hyp.).
La condition $y(0) = 0$ fixe une primitive de G précise (parmi l'infinité de primitives possibles, indexées par $\mu\in\mathbb{R}$). On a :
$y(0) = 0 \Leftrightarrow \left(\int_0^x g(t)dt + \mu\right)e^{-0}\Big|_{x=0} = 0 \Leftrightarrow \mu = 0.$

Donc l'unique solution est $\underline{y(x) = e^{-x}\cdot\int_0^x g(t)\,dt}$.

③ $\left|\int_0^x y(t)\,dt\right| \leq e^{-x}\int_0^x |g(t)|\,dt \underset{(Hyp)}{\leq} M x e^{-x} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0.$ ■

$x\to\infty$ donc (on ne regarde que pour $x >> 0$.)

EXERCICE 5

① $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^2$ et elle est continue sur $\mathbb{R}^2$

② $f'_x(x,y) = 2x - 4y$ et $f'_y(x,y) = 3y^2 + 4(1-x)$.

③ (x,y) pt. critique $\Leftrightarrow f'_x = f'_y = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ 3y^2 + 4(1-2y) = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x,y) = (4,2) \\ (x,y) = (\frac{4}{3},\frac{2}{3})\end{cases}$

④ et ⑤ : On remarque que f'_x et f'_y sont continues partout sur $\mathbb{R}^2$ et en particulier aussi ds. un voisinage des pts. critiques. On calcule alors le discriminant

$$D = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 6y\end{vmatrix} = 4\cdot\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3y\end{vmatrix} = 4(3y-4). \text{ On a :}$$

$D(4,2) = 4(6-4) = 8 > 0$ et $f''_{xx} = 2 > 0 \Rightarrow (4,2)$ est pt. de min. loc.
$D(\frac{4}{3},\frac{2}{3}) = 4(\cancel{3}\cdot\frac{2}{\cancel{3}} - 4) = -8 < 0 \Rightarrow (4/3, 2/3)$ est point de selle.

⑥ et ⑦ : $(4,2)$ n'est pas min. global. En effet, si on prend l'applic part. $f(0,y) = y(y^2+4) \xrightarrow{y\to\pm\infty} \pm\infty$ on voit que max, min globaux $= \pm\infty$. ■