Université de Cergy-Pontoise
Mai 2014

Algèbre

Licence Mathématiques-Physique-Informatique, première année

Durée 3 heures, documents et calculatrice interdits

Question de cours - 4 points

Démontrer que si P est un polynôme non nul de $\mathbb{K}[X]$, et si P est de degré $n \in \mathbb{N}$, alors P a au maximum n racines.

Premier exercice - 4 points

Soit A et B les polynômes définis par :

$$A(X) = X^4 - 5X^3 + 4X^2 + 3X + 9, \qquad B(X) = X^3 - 1$$

1. Déterminer le quotient et le reste de la division de A par B.
2. Donner une factorisation sur $\mathbb{R}$ du polynôme B et montrer que le pgcd de A et de B est le polynôme D défini par
$$D(X) = X^2 + X + 1$$
3. Faire la division euclidienne de A par D.
4. Donner la liste des racines complexes de A et celle des racines de B.

Deuxième exercice- 3 points

Soit S le système donné par :

$$\begin{cases} x + y + z + t = b_1 \\ 2x - y + z - t = b_2 \\ 3x + 2z = b_3 \end{cases}$$

où l'inconnue est $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, et où le vecteur $b = (b_1, b_2, b_3)$ est un élément de $\mathbb{R}^3$.

1. Écrire la matrice A de ce système.
2. Résoudre lorsque b est le vecteur nul. On vérifiera que c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et on en donnera une base.
3. Montrer que, dans le cas général, le système a des solutions si et seulement si $b_1 + b_2 = b_3$.

Troisième exercice - 6 points

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3. On suppose que $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de E. Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice A dans la base $\mathscr{B}$ est

$$A = \begin{pmatrix} -11 & -13 & 9 \\ 9 & 12 & -8 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que $A^3 = I_3$. On montrera les calculs et on précise que :

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Montrer $\det A = 1$. Ce résultat était-il prévisible, en utilisant la question précédente ?
3. Soient les vecteurs

$$\begin{aligned} e'_1 &= e_1 + e_3 \\ e'_2 &= -2e_1 + e_2 - e_3 \\ e'_3 &= 2e_2 + 3e_3 \end{aligned}$$

   Déterminer $f(e'_1)$, $f(e'_2)$ et $f(e'_3)$. On remarquera que ces trois vecteurs s'écrivent facilement en fonction de e'_1, e'_2 et e'_3 ;
4. Montrer que $\mathscr{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de E. On notera P la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ vers la base $\mathscr{B}'$.
5. Déterminer A', matrice de f par rapport à la base $\mathscr{B}'$.
6. Calculer A'^3. Ce résultat était-il prévisible ?

Quatrième exercice - 3 points

On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^2$ et deux endomorphismes f et g tels que

$$\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} g$$

. On suppose que f n'est pas injective et est différent de l'endomorphisme nul.

1. Montrer que $\operatorname{Ker} f$ et donc $\operatorname{Ker} g$ ont pour dimension 1.
2. Montrer que $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Im} g$ ont même dimension, et que cette dimension est 1.
3. À partir de cette question, on suppose que $\operatorname{Ker} f \neq \operatorname{Im} f$. Montrer que ces deux sous-espaces sont supplémentaires.
4. Si de plus $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} g$, montrer qu'il existe un réel λ tel que $g = \lambda.f$. On pourra utiliser une base de E formée d'une base e_1 de $\operatorname{Ker} f$ et d'une base e_2 de $\operatorname{Im} f$.