L1 MPI S2 2014 Première session. Algèbre

Corrigé.

Premier exercice

1°)

$$\begin{array}{r|l} X^4 - 5X^3 + 4X^2 + 3X + 9 & X^3 - 1 \\ \cline{2-2} -X^4 \qquad\qquad\qquad + X & X - 5 \\ \cline{1-1} -5X^3 + 4X^2 + 4X + 9 & \\ 5X^3 \qquad\qquad - 5 & \\ \cline{1-1} 4X^2 + 4X + 4. & \end{array}$$

Le quotient est $Q(X) = X-5$, le reste $R(X) = 4(X^2+X+1)$

2°) $B(1) = 0$ donc $X-1$ est facteur de B et
$B(X) = (X-1)(X^2+X+1)$; X^2+X+1 est irréductible car son discriminant Δ est égal à -3.

On a : $A(X) = B(X)\,Q(X) + 4\,D(X)$ et $\mathrm{pgcd}(A,B) = \mathrm{pgcd}(B,D)$
$B(X) = (X-1)\,D(X) + 0$

Le PGCD de A et B est donc le dernier reste non nul, soit $D(X)$

3°) Par la question précédente :

$$A(X) = (X-1)(X-5)\,D(X) + 4\,D(X) = D(X)\left(X^2-6X+9\right) = D(X)\,(X-3)^2$$

4°) Les racines complexes de $D(X) = X^2+X+1$ sont $\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2} = e^{\frac{2i\pi}{3}}$

et son conjugué $\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2} = e^{-\frac{2i\pi}{3}}$

Les racines de A sont donc $\left\{3, e^{\frac{2i\pi}{3}}, e^{-\frac{2i\pi}{3}}\right\}$

celles de B sont $\left\{1, e^{\frac{2i\pi}{3}}, e^{-\frac{2i\pi}{3}}\right\}$

Deuxième exercice

1. $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

2. $$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ 2x - y + z - t = 0 \\ 3x + 2z = 0 \end{cases}$$

Faisons $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$; le système équivaut à :

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ -3y - z - 3t = 0 \\ -3y - z - 3t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ 3y + z + 3t = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = -y - z - t = -\frac{2}{3}z \\ y = -\frac{1}{3}z - t \end{cases} \iff \begin{cases} x = -\frac{2}{3}z \\ y = -\frac{1}{3}z - t \\ z = z \\ t = t \end{cases} \quad \text{où } (z,t) \in \mathbb{R}^2$$

donc l'ensemble solution est $\mathrm{Vect}\begin{pmatrix} -2/3 \\ -1/3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

3. Les mêmes manipulations de lignes conduisent au système :

$$\begin{cases} x + y + z + t = b_1 \\ -3x - z - 3t = b_2 - 2b_1 \\ -3y - z - 3t = b_3 - 3b_1 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y + z + t = b_1 \\ -3x - z - 3t = b_2 - 2b_1 \\ 0 = b_3 - b_2 - b_1 \end{cases}$$

en faisant $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$.

La condition de compatibilité est donc $\boxed{b_3 = b_2 + b_1}$

Troisième exercice.

$$A = \begin{pmatrix} -11 & -13 & 9 \\ 9 & 12 & -8 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

1) $$A^2 = \begin{pmatrix} -11 & -13 & 9 \\ 9 & 12 & -8 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -11 & -13 & 9 \\ 9 & 12 & -8 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -4 \\ 9 & 11 & -7 \\ 18 & 22 & -15 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -4 \\ 9 & 11 & -7 \\ 18 & 22 & -15 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -11 & -13 & 9 \\ 9 & 12 & -8 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2) $$\begin{vmatrix} -11 & -13 & 9 \\ 9 & 12 & -8 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -11\begin{vmatrix} 12 & -8 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - 9\begin{vmatrix} -13 & 9 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= -11(4) - 9(-5) = -44 + 45 = 1$$

· Prévisible car $A^3 = I_3 \Rightarrow \det(A^3) = (\det A)^3 = \det I_3 = 1$

Comme $\det A \in \mathbb{R}$, $\det A = 1$.

3) Matrice de $f(e'_1)$: $$\begin{pmatrix} -11 & -13 & 9 \\ 9 & 12 & -8 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$ donc $f(e'_1) = e'_2$

Matrice de $f(e'_2)$: $$\begin{pmatrix} -11 & -13 & 9 \\ 9 & 12 & -8 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$ donc $f(e'_2) = e'_3$

Matrice de $f(e'_3)$: $$\begin{pmatrix} -11 & -13 & 9 \\ 9 & 12 & -8 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$ donc $f(e'_3) = e'_1$.

4.) La matrice de ces trois vecteurs dans la base $\mathcal{B}$ est

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$ et $\det P = 3 + 0 - 4 + 2 - 0 - 0 = 1 \neq 0$

Ces vecteurs sont donc indépendants, ils forment une base, P est la matrice de passage.

5. La question 3 permet d'assurer que

$$M_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = A'$$

6. $A'^3 = I_3$ (on a, au passage $A'^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$)

prévisible car :

$$A' = P^{-1}AP \Rightarrow A'^3 = P^{-1}APP^{-1}APP^{-1}AP = P^{-1}A^3P = P^{-1}P = I_3$$

Quatrième exercice

1. f n'est pas injective donc $\operatorname{Ker} f \neq \{0\}$, $\dim \operatorname{Ker} f \neq 0$
f n'est pas nulle donc $\operatorname{Ker} f \neq \mathbb{R}^2$, $\dim \operatorname{Ker} f \neq 2$
La seule alternative est $\dim \operatorname{Ker} f = 1$.

2. Par th. du rang $\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = 2$ donc $\dim \operatorname{Im} f = 1$
Le même calcul donne $\dim \operatorname{Im} g = 1$

3. Si $\operatorname{Ker} f \neq \operatorname{Im} f$, ce sont deux droites distinctes du plan, leur intersection est nulle : leur somme est directe, de dimension 2, c'est $\mathbb{R}^2$ entier

$$\operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f = \mathbb{R}^2$$

4. Si $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}(e_1)$ $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(e_2)$, la somme directe dit que $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$
et $f(e_1) = 0$ $f(e_2) = k e_2$ $k \neq 0$
donc $M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$; de même $M_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k' \end{pmatrix}$

et $g = \frac{k'}{k} \times f$ puisque $M_{\mathcal{B}}(f) = \frac{k'}{k} M_{\mathcal{B}}(g)$