Université de Cergy-Pontoise
Juin 2013

Algèbre

Licence Mathématiques-Physique-Informatique,
première année, seconde session
Durée 2 heures, documents et calculatrice interdits

Question de cours - 4 points

Soit $\mathbb{R}[X]$ l'anneau des polynômes à coefficients réels. On suppose que A et B sont deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$, et que B n'est pas le polynôme nul.

1. Énoncer ce qu'est la division euclidienne de A par B.
2. Démontrer l'**unicité** du quotient et du reste dans la division euclidienne de A par B.

Deuxième exercice - 5 points

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 3.

1. Montrer que F et G définis par
$$F = \{P \in E \mid P(0) = 0\} \qquad \text{et} \qquad G = \{P \in E \mid P'(0) = 0\}$$
sont des sous-espaces vectoriels de E.
2. Déterminer $F \cap G$. Les sous-espaces vectoriels F et G sont-ils en somme directe ?

Troisième exercice - 7 points

Soit $E = \mathbb{R}^3$, muni de la base canonique. On considère l'endomorphisme f (application linéaire de E dans E) dont la matrice par rapport à la base canonique est :
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 8 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer l'image du vecteur u avec

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

2. Calculer le déterminant de A et en déduire que A est inversible.
3. Déterminer A^{-1}.
4. Trouver un vecteur w tel que

$$f(w) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Quatrième exercice - 4 points

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Dans tout l'exercice, f et g désignent des endomorphismes de E.

1. On suppose que
$$f \circ g = 0$$
où 0 désigne l'endomorphisme nul. Montrer que
$$\operatorname{Im} g \subset \operatorname{Ker} f$$
2. Réciproquement, montrer que si on suppose $\operatorname{Im} g \subset \operatorname{Ker} f$, alors $f \circ g = 0$.