Université de Cergy-Pontoise
Mai 2013

Algèbre

Licence Mathématiques-Physique-Informatique, première année

Durée 3 heures, documents et calculatrice interdits

Question de cours - 4 points

Soit f une application linéaire entre E et F, deux K-espaces vectoriels.

1. Rappeler ce que signifie que f est une application injective.
2. Rappeler la définition du noyau de f, noté $\operatorname{Ker} f$.
3. Démontrer le théorème

$$f \text{ injective} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \operatorname{Ker} f = \{0_E\}$$

Premier exercice - 6 points

On désire déterminer le reste de la division euclidienne du polynôme $X^n + 1$ par le polynôme $X^2 + 1$, lorsque n est un entier supérieur ou égal à 3.

1. Trouver le quotient et le reste des divisions euclidiennes :
   de $X^3 + 1$, par $X^2 + 1$,
   de $X^4 + 1$ par $X^2 + 1$,
   de $X^5 + 1$ par $X^2 + 1$
   de $X^6 + 1$ par $X^2 + 1$.
2. On retourne au cas général. Justifier que le reste est de degré inférieur ou égal à 1.
3. En utilisant les racines complexes de $X^2 + 1$, calculer explicitement le reste de la division euclidienne de $X^n + 1$ par $X^2 + 1$ en fonction de i et de n.
4. Déterminer i^n suivant que n est de la forme $4p$ ou $4p + 1$ ou $4p + 2$ où $4p + 3$, avec $p \in \mathbb{N}$
5. Montrer que dans la division de $X^n + 1$ par $X^2 + 1$, il y a quatre restes possibles et préciser ces restes suivant les valeurs de n.

Troisième exercice - 6 points

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3. On suppose que $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de E.

1. Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice A dans la base $\mathscr{B}$ est

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & -4 \end{pmatrix}$$

   Soient les vecteurs $e_1' = e_1 + e_3$ et $e_2' = 2e_1 + e_2$. Déterminer $f(e_1')$ et $f(e_2')$.

2. Montrer que le vecteur $e_3' = e_3 - e_2$ est dans le noyau de f. L'application linéaire f est-elle injective ? Est-elle surjective ?
3. Montrer que $\mathscr{B}' = (e_1', e_2', e_3')$ est une base de E.
4. On note P la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ vers la base $\mathscr{B}'$. Écrire P et déterminer P^{-1}.
5. Déterminer la matrice de f par rapport à la base $\mathscr{B}'$.

Quatrième exercice - 4 points

Soit E un espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On suppose également que f est un endomorphisme de E, c'est-à-dire une application linéaire de E dans E. On rappelle que l'on note $f(F)$ l'ensemble des vecteurs de E qui sont l'image par f d'un vecteur de F.

1. Montrer que

$$f(F+G) = f(F) + f(G)$$

2. Montrer que

$$f(F \cap G) \subset f(F) \cap f(G)$$

3. Montrer que si f est injective, on a également

$$f(F) \cap f(G) \subset f(F \cap G)$$