Question de cours :

Voir le cours.

Premier exercice

1. Le plus direct : $E \longrightarrow \mathbb{R}$

F est le noyau de $P \longrightarrow P(0)$

qui est une forme linéaire ; c'est donc un s.e.v.

Sinon :

Soit $P \in F$, $Q \in F$, $\lambda \in \mathbb{R}$

alors $(P + \lambda Q)(0) = P(0) + \lambda Q(0) = 0 + \lambda \times 0 = 0$

donc $P + \lambda Q \in F$

dém. identique pour G.

2. $F \cap G = \{ P \in E \,/\, P(0) = P'(0) = 0 \}$

C'est donc l'ensemble des polynômes admettant 0 comme racine (au-moins) double.

donc $P \in F \cap G \iff \exists a, b ,\ P = (aX + b)X^2$

puisque $d^\circ P \leq 3$ $\qquad = aX^3 + bX^2$

On voit donc que $F \cap G = \mathrm{Vect}(X^2, X^3) \neq \{0\}$

F et G ne sont pas en somme directe.

Rem : il est tout aussi rapide de prendre

$P(x) = aX^3 + bX^2 + cX + d$

et d'observer : $\begin{cases} P \in F \iff d = 0 \\ P \in G \iff c = 0 \end{cases}$

Troisième exercice.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 8 \end{pmatrix}$$

1. $$Au = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ -7 \end{pmatrix}$$

2. $$\det A = 2\times(-1)\times(-5) + 2\times 3\times 3 - (1\times -1\times 3) - 2\times 2\times 8$$
$$= 10 + 18 + 3 - 32 = -1$$

donc A est inversible.

3. Si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ on doit résoudre :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 5x_3 = y_1 \\ 2x_1 \qquad + 3x_3 = y_2 & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ 3x_1 - x_2 + 8x_3 = y_3 & L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 5x_3 = y_1 \\ \quad -4x_2 + 13x_3 = y_2 - 2y_1 \\ \quad -7x_2 + 23x_3 = y_3 - 3y_1 \end{cases}$$

Resolvons le système formé par les deux dernières égalités par combinaisons :

$$\begin{array}{r|l} 23 & -4x_2 + 13x_3 = y_2 - 2y_1 \\ -13 & -7x_2 + 23x_3 = y_3 - 3y_1 \end{array}$$

$$(-92 + 91)x_2 = 23y_2 - 13y_3 - 46y_1 + 39y_1$$

$$x_2 = 7y_1 - 23y_2 + 13y_3$$

de même $$x_3 = 2y_1 - 7y_2 + 4y_3$$

et en reportant :

$$x_1 = -3y_1 + 11y_2 - 6y_3.$$

En définitive :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 11 & -6 \\ 7 & -23 & 13 \\ 2 & -7 & 4 \end{pmatrix}$$

4. w est l'image de $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ par f^{-1} donc :

$$w = \begin{pmatrix} -3 & 11 & -6 \\ 7 & -23 & 13 \\ 2 & -7 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ -52 \\ -16 \end{pmatrix}$$

Quatrième exo

1. Soit $y \in \operatorname{Im} g$. Alors, il existe x de E tel que $y = g(x)$. Mais alors

$$f(y) = f \circ g(x) = 0(x) = 0 \text{ donc } \underline{y \in \operatorname{Ker} f}$$

On a montré que $\operatorname{Im} g \subset \operatorname{Ker} f$.

2. On suppose que $\operatorname{Im} g \subset \operatorname{Ker} f$.
Soit x quelconque de E, alors

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = 0 \text{ car } g(x) \in \operatorname{Im} g \text{ et}$$

donc $g(x) \in \operatorname{Ker} f$.

Ainsi $f \circ g$ est l'endomorphisme nul.