Corrigé

Question de cours

1. $f : E \longrightarrow F$ est injective

si $\forall (a,b) \in E^2,\ a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$

ou bien si $\forall (a,b) \in E^2,\ f(a) = f(b) \Rightarrow a = b.$

2. $\operatorname{Ker} f = f^{-1}(\{0_F\}) = \{x \in E \,/\, f(x) = 0_F\}$

3. • Si f est injective, et si $x \in \operatorname{Ker} f$, on a :

$$f(x) = 0 = f(0_E) \quad \text{(car } f \text{ est linéaire)}$$

donc $x = 0_E$ (injectivité) c'-à-d $\operatorname{Ker} f = \{0_E\}$

• Si $\operatorname{Ker} f = \{0_E\}$ et $f(a) = f(b)$, alors $f(a-b) = 0_F$ donc $a - b = 0_E$, $a = b$ et f est injective.

Premier exercice

1.
$$\begin{array}{r|l} X^3+1 & X^2+1 \\ \underline{-X^3-X} & X \\ -X+1 & \end{array}$$

le reste est $-X+1$

$$\begin{array}{r|l} X^4+1 & X^2+1 \\ \underline{-X^4-X^2} & X^2-1 \\ -X^2+1 & \\ \underline{X^2+1} & \\ 2 & \end{array}$$

le reste est 2

$$\begin{array}{r|l} X^5+1 & X^2+1 \\ \underline{-X^5-X^3} & X^3-X \\ -X^3+1 & \\ \underline{X^3+X} & \\ X+1 & \end{array}$$

le reste est $X+1$

$$\begin{array}{r|l} X^6+1 & X^2+1 \\ \underline{-X^6-X^4} & X^4-X^2+1 \\ -X^4+1 & \\ \underline{X^4+X^2} & \\ X^2+1 & \\ \underline{-X^2-1} & \\ 0 & \end{array}$$

le reste est 0

2. Comme le diviseur est de degré deux, le reste est de degré inférieur ou égal à 1.

3. La division euclidienne s'écrit

$$X^n + 1 = (X^2+1)Q(X) + aX + b$$

En faisant $X = i$ puis $X = -i$

$$\begin{cases} i^n + 1 = ai + b \\ (-1)^n i^n + 1 = -ai + b \end{cases} \quad \text{soit } b = 1 + \frac{i^n + (-1)^n i^n}{2}$$

$$a = \frac{i^n - (-1)^n i^n}{2i}$$

4. $i^{4p} = (i^4)^p = 1$

$i^{4p+1} = i$

$i^{4p+2} = i^2 = -1$

$i^{4p+3} = i^3 = -i$

5. si $n = 4p$, $i^n = 1$ $(-1)^n = 1$ donc $b = 2$, $a = 0$ le reste est 2

si $n = 4p+1$, $i^n = i$ $(-1)^n = -1$ donc $b = 1$, $a = 1$ le reste est $X+1$

si $n = 4p+2$: $i^n = -1$ $(-1)^n = 1$ donc $b = 0$, $a = 0$ le reste est 0

si $n = 4p+3$: $i^n = -i$ $(-1)^n = -1$ donc $b = 1$, $a = -1$ le reste est $-X+1$

Troisième exercice

1. $$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{donc } f(e'_1) = -2e'_1$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{donc } f(e'_2) = -2e'_2$$

2) $$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ +1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{donc } f(e'_3) = 0, \; e'_3 \in \operatorname{Ker} f.$$

Comme $e'_3 \neq 0$, $\operatorname{Ker} f \neq \{0\}$ donc f n'est pas injective ; par th. du rang f n'est pas non plus surjective

3) On peut montrer que (e'_1, e'_2, e'_3) est <u>libre</u>, par exemple

en calculant $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -1 \neq 0$

Comme il y a trois vecteurs en dimension trois, il s'agit bien d'une base

4. La matrice de passage est

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si on écrit le système :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = y_1 \\ x_2 - x_3 = y_2 \\ x_1 + x_3 = y_3 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 + 2x_2 = y_1 \\ x_2 - x_3 = y_2 \\ -2x_2 + x_3 = y_3 - y_1 \end{cases} \quad \text{par } L_3 \leftarrow L_3 - L_1$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = y_1 \\ x_2 - x_3 = y_2 \\ -x_3 = -y_1 + 2y_2 + y_3 \end{cases} \quad \text{par } L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2$$

$$\begin{cases} x_1 = -y_1 + 2y_2 + 2y_3 \\ x_2 = y_1 - y_2 - y_3 \\ x_3 = y_1 - 2y_2 - y_3 \end{cases}$$

donc $$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

5. On peut calculer $A' = P^{-1}AP$ ou observer que $f(e'_1) = -2e'_1$, $f(e'_2) = -2e'_2$, $f(e'_3) = 0$

et donc $$A' = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Quatrième exercice

1. Si $x = x_1 + x_2$ où $x_1 \in F$ et $x_2 \in G$

alors $f(x) = f(x_1 + x_2) = \underbrace{f(x_1)}_{\in f(F)} + \underbrace{f(x_2)}_{\in f(G)}$ donc $f(x) \in f(F) + f(G)$

et $f(F) \subset f(F) + f(G)$.

si $y = f(x_1) + f(x_2)$ où $x_1 \in F$ et $x_2 \in G$, on a $y = f(x_1 + x_2)$

donc $y \in f(F+G)$ et $f(F) + f(G) \subset f(F+G)$

2. Soit $x \in F \cap G$, alors $f(x) \in f(F)$ et $f(x) \in f(G)$

donc $f(F \cap G) \subset f(F) \cap f(G)$

3. Soit $y \in f(F) \cap f(G)$: $y = f(x_1) = f(x_2)$ où $x_1 \in F$ et $x_2 \in G$

mais f injective donc $x_1 = x_2 \in F \cap G$ d'où $y \in f(F \cap G)$ $\Big\}$ $f(F) \cap f(G) \subset f(F \cap G)$