L1-S2-M2 2011/2012 **18 juin 2011 - Session 2**

Examen de Mathématiques (M2)

Dure: **2** heures

Les documents, les calculatrices, les téléphones portables, les smartphones, ne sont pas autorisés

---

Exercice 1 : Soit $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices 2×2 à coefficients réels, muni de l'addition des matrices et de la multiplication par des scalaires et supposons connu le fait que $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ devient ainsi un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Soit le sous-ensemble $\mathcal{C}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par :

$$\mathcal{C} = \left\{ M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \middle| \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } M = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \right\}$$

1. Montrer que $\mathcal{C}$ est sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Soient les matrices $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   (a) Montrer que $I, J \in \mathcal{C}$ et que toute matrice $M \in \mathcal{C}$ s'écrit comme combinaison linéaire de I et J.
   (b) Montrer que le système de 2 vecteurs $\{I, J\}$ est libre. Pourquoi est-il une base de $\mathcal{C}$?
3. Munissons à présent $\mathcal{C}$ de la loi de multiplication usuelle des matrices 2×2.
   [Indication pour la suite : on pourrait utiliser la question (2.a)]
   (a) Calculer J^2.
   (b) Montrer que cette loi est interne à $\mathcal{C}$ (autrement dit, $\mathcal{C}$ est stable par multiplication).
   (c) La multiplication dans $\mathcal{C}$ est-elle commutative ? Quel est l'élement neutre ?
   (d) La multiplication dans $\mathcal{C}$ est-elle associative ?
   (e) Montrer que chaque $M \in \mathcal{C}$ sauf la matrice nulle admet un élément inverse que l'on précisera. [Indication : on pourrait utiliser la question (2.b)]
4. Quelle est la structure algébrique de $\mathcal{C}$ si on le munit de l'addition et de la multiplication entre les matrices ? Justifiez la réponse.

Exercice 2 : Soit le polynôme $P = X^4 - 4X + 3$.

1. Montrer qu'il admet une racine double $\alpha \in \mathbb{R}$, qu'on trouvera. Cette racine est-elle triple ?
2. Soit $Q = X^2 + 2X + 3$. Trouver ses racines et le factoriser (en produit de polynômes irréductibles) sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$.
3. Q divise-t-il P ?
4. En déduire une factorisation de P en produit de polynômes irréductibles sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$.

Exercice 3 : Soit $\mathbb{R}_2[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré ≤ 2. Soit T l'application de $\mathbb{R}_2[X]$ dans lui-même définie par : $T(P) = P + P' + P''$, $\quad \forall P \in \mathbb{R}_2[X]$ où P', P'' sont les polynômes dérivées (première, seconde) de P.

1. Montrer que T est une application linéaire.
2. Pour $P = a + bX + cX^2 \in \mathbb{R}_2[X]$ calculer $T(P)$ exprimé dans la base canonique $\mathcal{B}_0 = \{1, X, X^2\}$.
3. Trouver la matrice A de T dans la base canonique $\mathcal{B}_0$.
4. En déduire que $\ker T$, le noyau de T, est égal à $\{0\}$ (où 0 est le polynôme nul).
5. En déduire que T est bijective. Justifier.
6. Montrer que le système de vecteurs $\mathcal{B} = \{1, 1+X, 1+X-X^2\}$ est aussi une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
7. Trouver la matrice M de passage de $\mathcal{B}_0$ à $\mathcal{B}$ ainsi que son inverse, la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}_0$.
8. Si on note par A' la matrice de T dans la nouvelle base $\mathcal{B}$, donner une relation reliant la matrice A' aux matrices A, M et M^{-1}.
9. Calculer A'.
