L1-M2 2011/2012 **22 mai 2012 - Session 1**

Examen de Mathématiques (M2)

Duré: **3** heures

Les documents, les calculatrices et les téléphones portables ne sont pas autorisés

Des questions ayant un degré de difficulté plus élevé sont signalés par un astérisque $*$

Exercice 1 : Soit $\mathrm{i} \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{i}^2 = -1$. On considère le sous-ensemble de $\mathbb{C}$ suivant :

$$E = \{(a-b) + \mathrm{i}(a+b) \in \mathbb{C} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}.$$

1. On se propose de montrer que $(E, +)$ est un groupe (par "+" on entend l'addition usuelle des nombres complexes).
   (a) Montrer que la loi "+" est une loi interne sur E.
   (b) Montrer que $0 \in E$. Justifier qu'il s'agit de l'élément neutre par rapport à la loi "+".
   (c) Montrer que si $z \in E$ alors $-z \in E$. Justifier qu'il s'agit de l'élément opposé (élément symmétrique par rapport à la loi "+") à $z \in E$.
   (d) En déduire que $(E, +)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}, +)$.
2. Soit $A = \{u + \mathrm{i}v \mid u, v \in \mathbb{Z},\ u - v \in 2\mathbb{Z}\}$ où $2\mathbb{Z}$ est l'ensemble des entiers pairs.
   (a) Montrer que $E \subset A$.
   (b)* Montrer que $A \subset E$ et en déduire $E = A$.
3. Soit $F = \{u + \mathrm{i}v \mid u, v \in 2\mathbb{Z}\}$. Montrer que $F \subset E$ mais que $F \neq E$. (Indication : utiliser la question 2)
4. On munit à présent E de la multiplication "$\cdot$" usuelle des nombres complexes.
   (a) Montrer que si $\alpha, \beta \in E$ alors $\alpha \cdot \beta \in E$ (i.e. E est stable par multiplication) et de même pour F.
   (b)* Montrer qu'on ne peut trouver d'element neutre $\varepsilon \in E$ par rapport à la multiplication dans E.

Exercice 2 : Soit $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels.

1. Soit le polynôme $D(X) = X^2 - X - 2$. Trouver ses racines et en déduire sa factorisation sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $P(X) \in \mathbb{R}[X]$ de degré au moins 2. Notons par $Q(X)$ et $R(X)$ le quotient, respectivement le reste de la division de $P(X)$ par $D(X)$.
   (a) Énoncer le théoreme de division euclidienne pour ces polynomes. Quel est le degré maximal de $R(X)$?
   (b) Supposons que $P(X)$ est choisi tel que : (i) $P(-1) = 2$ et (ii) $(X+1) \cdot P(X) + X \cdot P(X+3) = 1$.
   En déduire explicitement le reste $R(X)$.
   (Indication : on fera la liaison entre les racines de $D(X)$ et les hypothèses (i) & (ii))

Exercice 3 : Soit $P(X) \in \mathbb{R}[X]$ donné par $P(X) = X^4 + X^3 + aX^2 + bX + c$, où $a, b, c \in \mathbb{R}$ sont des paramètres.

1. Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :
   (i) $P(1) = 2$, $P(-2) = 8$ et $P(-1) = 1$.
   (ii) Les constantes $a, b, c \in \mathbb{R}$ (de la définition de $P(X)$) sont solutions de l'équation matricielle :

$$\text{(E)} \qquad A \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{où} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Calculer le rang de la matrice A par la méthode du pivot. En déduire qu'il existe un unique triplet $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ vérifiant (E).
3. Calculer ces uniques valeurs de a, b, c comme ceci :
   (a) Calculer le déterminant de A (noté $\det A$) et en déduire que (E) équivaut à un système de Cramer.
   (b) Calculer la solution de ce système. (Indication : par exemple, en utilisant les formules de Cramer)

Tourner la page s.v.p. $\longrightarrow$

Exercice 4 : Soit $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ et soit Φ l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même (endomorphisme) dont la matrice $\mathbf{M}_{\mathcal{B}}\Phi$ dans la base $\mathcal{B}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & -4 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Donner les vecteurs $\Phi(\mathbf{e}_1), \Phi(\mathbf{e}_2), \Phi(\mathbf{e}_3)$ en tant que vecteurs-colonne (dans la base $\mathcal{B}$).
2. Montrer que le rang de Φ vaut 2. (Indication : on pensera à calculer celui de A).
3. Pourquoi peut-on en déduire que la dimension du noyau $\ker \Phi$ de Φ est 1 ?
4. Donner une base $\mathcal{K} = \{\mathbf{k}\}$ de $\ker \Phi$.
5. Trouver une base $\mathcal{J} = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ du sous-espace image $\operatorname{Im} \Phi$. (Indication : $\operatorname{Im} \Phi = \operatorname{Vect}\{\Phi(\mathbf{e}_1), \Phi(\mathbf{e}_2), \Phi(\mathbf{e}_3)\}$)
6. Soit $\mathcal{B}' = \mathcal{J} \cup \mathcal{K} = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$. Montrer qu'il s'agit d'une base de $\mathbb{R}^3$.
7. Justifier $\mathbb{R}^3 = \ker \Phi \oplus \operatorname{Im} \Phi$.
8. Écrire la matrice de passage $P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$, depuis la base canonique $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{B}'$. On la notera P.
9. Calculer son inverse P^{-1} (qui est la matrice de passage $P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$, depuis la base $\mathcal{B}'$ vers la base $\mathcal{B}$).
10. Si A' est la matrice $\mathbf{M}_{\mathcal{B}'}\Phi$ de Φ dans la base $\mathcal{B}'$, quelle est la relation entre A, P, P^{-1} et A' ? (justifier brièvement)
11. Calculer A'.