CORRIGÉ de L'EXAMEN de MATHEMATIQUES

L1-S2-M2 – SESSION 2 (18.06.2012)

EXERCICE 1

1) $\mathcal{C} \neq \emptyset$ car $\mathbb{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{C}$ (on prend $a=b=0$)

Aussi, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\forall M, M' \in \mathcal{C}$ on a $\lambda M + \mu M' \in \mathcal{C}$, car:

$$\lambda M + \mu M' = \begin{pmatrix} \lambda a & -\lambda b \\ \lambda b & \lambda a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu c & -\mu d \\ \mu d & \mu c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a + \mu c & -(\lambda b + \mu d) \\ \lambda b + \mu d & \lambda a + \mu c \end{pmatrix} \in \mathcal{C}$$

2) a) $M = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix} = aI + bJ$.

b) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda I + \mu J = \mathbb{O} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda & -\mu \\ \mu & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \mu = 0 \end{cases}$

d'où $\{I, J\}$ est libre, et par a) : $\mathcal{C} = \mathrm{Vect}\{I, J\}$ (autrement dit I, J engendrent $\mathcal{C}$). Donc base.

3) a) $J^2 = -I$

b) $\forall M, M' \in \mathcal{C}$ on a : $M = aI + bJ$, $M' = cI + dJ$

d'où $MM' = (aI + bJ)(cI + dJ) \underset{a}{=} (ac - bd)I + (ad + bc)J$

et par 2.b) on a $MM' \in \mathcal{C}$.

c) $M'M = (ac - bd)I + (ad + bc)J = MM'$ (commut.)

I est l'él. neutre (comme pour $M_2(\mathbb{R})$)

d) Associativité : $(MM')M'' = M(M'M'')$. Vraie, par calcul. Autrement : on voit une analogie évidente entre $\mathcal{C}$ et le corps des nb. complexes, où $M = aI + bJ$ est analogue à $z = a + ib$ (ici J joue le rôle de i ; on a $J^2 = -I$, etc...). Alors l'assoc. du produit ds. $\mathbb{C}$ suggère que tout se passe pareillement ds. $\mathcal{C}$... Ceci peut être aussi utilisé pour la question suivante:

(e) Si $M = aI + bJ$ alors son inverse $M' = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$ doit vérifier $MM' = M'M = I$ ce qui équivaut à $(ax - by - 1)I + (ay + bx)J = \mathbb{O} \underset{\{I,J\}\text{ libre}}{\Longleftrightarrow}$

$\begin{cases} ax - by = 1 \\ bx + ay = 0 \end{cases}$ dont le déterminant est $\det\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = a^2 + b^2$ qui est $\neq 0$ ssi $(a,b) \neq (0,0)$. Donc à l'exception de $M = \mathbb{O} \in \mathcal{C}$, toute matrice $M = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{C}$ admet un inverse $M' = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$ où x, y = sol. du syst. ci-dessus (qui est de Cramer)

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -b \\ 0 & a \end{vmatrix}}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} \; ; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 \\ b & 0 \end{vmatrix}}{a^2 + b^2} = -\frac{b}{a^2 + b^2}$$

Donc $M^{-1} = \dfrac{1}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \dfrac{1}{a^2 + b^2}(aI - bJ)$

(Vérification : $MM^{-1} = \dfrac{1}{a^2 + b^2}(aI + bJ)(aI - bJ) = \dfrac{1}{a^2 + b^2}\left((a^2 + b^2)I + \underbrace{(ab - ab)}_{=0}J\right) = I$)

(Obs : Remarquer encore une fois l'analogie entre $\mathcal{C}$ et $\mathbb{C}$. Pour $\mathbb{C}$: $z^{-1} = \dfrac{1}{z} = \dfrac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2} = \dfrac{a - ib}{a^2 + b^2}$)

4) $(\mathcal{C}, +)$ est groupe commutatif (car sous-groupe de $M_2(\mathbb{R})$)

$(\mathcal{C}, \cdot)$ vérifie associativité, $\exists$ l'él. neutre, chaque $M \in \mathcal{C} \setminus \{\mathbb{O}\}$ admet inverse et commutativité.

Donc pour que $(\mathcal{C}, +, \cdot)$ soit corps commutatif, ne manque plus que la distributivité. Vraie, car: $(M + M') \cdot M'' = MM'' + M'M''$ est valable dans $M_2(\mathbb{R})$ donc aussi ds. $\mathcal{C}$.

EXERCICE 2 : (1) α racine au moins double ssi $P(\alpha) = P'(\alpha) = 0$. Or ceci équivaut à $\alpha^4 - 4\alpha + 3 = 0$ et $4(\alpha^3 - 1) = 0$. La dernière donne $\alpha = 1$ ou $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$. En remplaçant $\alpha = 1$ dans $\alpha^4 - 4\alpha + 3$ ça donne 0, donc $\boxed{\alpha = 1}$ est racine double de P, mais pas triple car $P''(1) = 12 \neq 0$.

(2-3) On divise P par $(X-1)^2$ et on obtient (et reste nul) le quotient $Q = X^2 + 2X + 3$ dont les racines sont $-1 \pm i\sqrt{2} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, donc Q est irreductible sur $\mathbb{R}$ et $Q = (X+1-i\sqrt{2})(X+1+i\sqrt{2})$ sur $\mathbb{C}$

(4) Donc $P = (X-1)^2(X+1-i\sqrt{2})(X+1+i\sqrt{2})$ est la factorisation de P sur $\mathbb{C}$, alors que

$$P = (X-1)^2(X^2+2X+3)$$ est la factorisation de P sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 3 : (1) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\forall P, Q \in E \equiv \mathbb{R}_2[X]$

on a : $T(\lambda P + \mu Q) = (\lambda P + \mu Q) + (\lambda P + \mu Q)' + (\lambda P + \mu Q)''$
$= \lambda(P + P' + P'') + \mu(Q + Q' + Q'') = \lambda T(P) + \mu T(Q)$.

(2) $T(a + bX + cX^2) = a + bX + cX^2 + b + 2cX + 2c$
$= (a + b + 2c)1 + (b + 2c)X + cX^2$

donc $T(P) = \begin{pmatrix} a+b+2c \\ b+2c \\ c \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_0}$

(3) $T(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_0}$; $T(X) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_0}$; $T(X^2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_0}$

d'où $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0} T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv A$

(4) $\mathrm{Ker}\, T = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid T(P) = 0\}$. Or $T(P)$ trouvé à (2) donne : $T(P) = 0 \iff \begin{cases} a + b + 2c = 0 \\ b + 2c = 0 \\ c = 0 \end{cases}$

qui est un syst. de Cramer homogène, donc avec unique sol. $a = b = c = 0$.

Donc $\mathrm{Ker}\, T = \{O\}$ (où O = poly nul)

(5) On sait $\mathrm{Ker}\, T = \{0\} \iff T$ injective. De plus, le Thm. du rang : $\dim \mathbb{R}_2[X] = \dim \mathrm{Ker}\, T + \mathrm{rang}\, T$

i.e. pour notre cas : $3 = 0 + \mathrm{rang}\, T \Rightarrow \mathrm{rang}\, T = 3$

Or $\mathrm{rang}\, T = \dim \mathrm{Im}\, T$ et $\mathrm{Im}\, T \underset{\text{s.e.v.}}{\subseteq} \mathbb{R}_2[X]$. Donc $\mathrm{Im}\, T = \mathbb{R}_2[X]$ i.e. T est surjective aussi.

(6) $\mathrm{Card}\, \mathcal{B} = 3 = \dim \mathbb{R}_2[X]$. Il suffit alors de montrer que $\mathcal{B}$ est libre ce qui équivaut au $\mathrm{rang}\, \mathcal{B} = \mathrm{rang} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 3 = \mathrm{card}\, \mathcal{B}$. Vrai.

(7) $M = P_{\mathcal{B}_0 \mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $M^{-1} \equiv P_{\mathcal{B}\mathcal{B}_0}$ sont des solutions $1, X, X^2$ du système : $\begin{cases} 1 = Q_1 \\ 1 + X = Q_2 \\ 1 + X - X^2 = Q_3 \end{cases} \iff$

(on a noté $\mathcal{B} = \{Q_1, Q_2, Q_3\}$)

$\iff \begin{cases} 1 = Q_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \\ X = -Q_1 + Q_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \\ X^2 = Q_2 - Q_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \end{cases} \Rightarrow M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

(8-9)
$$\begin{array}{ccc} (E, \mathcal{B}_0) & \xrightarrow{A} & (E, \mathcal{B}_0) \\ {\scriptstyle M} \uparrow & & \downarrow {\scriptstyle M^{-1}} \\ (E, \mathcal{B}) & \xrightarrow{A'} & (E, \mathcal{B}) \end{array}$$

$A' = M^{-1} A M \underset{\text{calculs}}{= \ldots =} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$