L1 - Maths S2 - SESSION 1 - 2011-2012

CORRIGÉ de l'EXAMEN de MATHEMATIQUES

(date examen : 22.05.2012)

EXERCICE 1 : 1.a "+" loi interne sur E :

• $E \neq \emptyset$. Oui, car pour $a=b=0 \in \mathbb{Z}$ on a $0 \in E$.

• $\forall a,b,a',b' \in \mathbb{Z}$ t.q. $(a-b)+i(a+b) \in E$ et $(a'-b')+i(a'+b') \in \mathbb{Z}$, on obtient pour leur somme : $[(a+a')-(b+b')]+i[(a+a')+(b+b')] \in E$, donc "+" est interne (i.e. E est stable par rapp. à "+")

1.b $e+if$ él. neutre par rapp. à "+" ssi $\forall a,b \in \mathbb{Z}$ $[(a-b)+i(a+b)]+[(m-n)+i(m+n)] = (a-b)+i(a+b)$ (où $e=m-n$ et $f=m+n$ ci-dessus). L'égalité équivaut à $m-n=0$ et $m+n=0$ i.e. $m=n=0$. Donc $e+if = 0+i0 = 0 \in \mathbb{C}$ est l'élément neutre.

1.c La commutativité étant évidente (car $E \subset \mathbb{C}$ et $(\mathbb{C},+)$ est groupe commutatif) pour trouver l'opposé de $u+iv = (a+b)+i(a-b)$ il suffit de résoudre : $(u+iv)+(u'+iv') = e+if \equiv 0$ en inconnues $k,l \in \mathbb{Z}$ où $u'=k-l$ et $v'=k+l$. L'égalité précédente équivaut à (voir calcul fait à 1.a) : $(a+k)-(b+l) = 0 = (a+k)+(b+l)$ $\Leftrightarrow l=-b$ et $k=-a$. Donc $u'+iv' = -(u+iv)$

1.d $(E,+)$ sous-groupe de $(\mathbb{C},+)$ ssi E est stable par rapport à l'addition et par rapport aux opposés, c'est à dire ssi $\forall z, \tilde{z} \in E$ on a : $z+\tilde{z} \in E$ et $-z \in E$. Or la première a été montrée à 1.a et la deuxième à 1.c.

2 Notons A l'ensemble $\{u+iv \mid u,v \in \mathbb{Z}, u-v \in 2\mathbb{Z}\}$. Montrer $E = A$ équivaut à m.q. $E \subset A$ et $E \supset A$.

a) $E \subset A$: $u=a-b$, $v=a+b \Rightarrow u-v = -2b \in 2\mathbb{Z}$.

b) $E \supset A$: Si $u+iv \in A$ alors $u+i(-v) \in A$, car $u+iv \in A \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}$ t.q. $u-v=2k$, donc $-v = 2k-u$, d'où $u-(-v) = 2(u-k) \in 2\mathbb{Z}$. Or $u \pm iv \in A \Leftrightarrow \exists k,k' \in \mathbb{Z}$ t.q. $u+v=2k'$ et $u-v=2k$ ce qui équivaut à $u=k+k'$ et $v=k'-k$. En posant $a=k'$ et $b=-k$ on voit que $u+iv = (a-b)+i(a+b)$ donc $\in E$

3 $F \subset E$: $\forall u,v \in 2\mathbb{Z} \overset{\text{déf.}}{\Longleftrightarrow} u=2k,\ v=2k',\ k,k' \in \mathbb{Z}$ donc $u-v = 2(k-k') \in 2\mathbb{Z}$

$F \neq E$: $u=5, v=3 \Rightarrow u-v = 2 \in 2\mathbb{Z} \Rightarrow$ $u+iv \in E$ mais $u,v \notin 2\mathbb{Z}$ donc $u+iv \notin F$.

4.a $\alpha \cdot \beta = (uu'-vv')+i(uv'+u'v)$ où $u+iv$ et $u'+iv' \in E$. Par calcul, on aboutit à $\alpha \cdot \beta = 2(a'b+ab')+i \cdot 2(aa'-bb') \in F \subset E$ ce qui montre à la fois que E est stable par multiplication mais aussi que F est stable car $\forall \alpha,\beta \in F \subset E$ on a $\alpha \cdot \beta \in F$.

Obs : calcul facilité si on observe que $\forall \alpha \in E$ s'écrit : $a(1+i)+b\overline{(1+i)}$.

4.b $1+i0$ est l'él. neutre pour "." dans $\mathbb{C}$. Or $E \subset \mathbb{C}$ et $1+i0 \notin E$ car $1-0 \notin 2\mathbb{Z}$. Donc si $\eta+i\nu \in E \subset \mathbb{C}$

était élément neutre pour la multiplication avec les $u+iv \in E$, ces $u+iv$ en tant qu'él. de $\mathbb{C}$ auraient 2 éléments neutres par rapp. à la m̂ loi, ce qui contredit l'unicité de l'él. neutre ds. $\mathbb{C}$.

Noter qu'on peut le démontrer autrement : Conformément au calcul de 4.a, $\forall u+iv \in E$, $(u+iv)\cdot(m+in) \in F$ mais, d'autre part, si $m+in$ est neutre, ce produit doit être égal à $u+iv$. Or, par 3 $F \subseteq E$ mais $F \neq E$ donc il suffira de choisir $u, v \in \mathbb{Z}$ t.q. $u-v \in 2\mathbb{Z}$ mais $u, v \notin 2\mathbb{Z}$ pour obtenir le contreexemple désiré.

EXERCICE 2 :

1 $X^2-X-2=(X^2-1)-(X+1)=(X+1)(X-2)$ est la fact. sur $\mathbb{R}$ et racines $x_1=-1$, $x_2=2$.

2 a $\begin{cases} P(X) = (X^2-X-2)\cdot Q(X) + R(X) \quad (*) \\ d^\circ R(X) \leq d^\circ(X^2-X-2)-1 = 1 \end{cases}$

2 b $d^\circ R(X) \leq 1 \Rightarrow R(X) = \alpha + \beta X$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
En remplaçant $x_1=-1$ en $(*)$ on déduit $P(-1) = \alpha - \beta$ d'où $P(-1) \overset{(i)}{=} 2 \Rightarrow \alpha - \beta = 2$ (a)
En remplaçant $x_1=-1$ en (ii) on a :
$(-1+1)P(-1) + (-1)P(-1+3) = 1 \Leftrightarrow P(2) = -1$ donc en posant $x_2 = 2$ dans $(*)$ on déduit
$P(-1) = \alpha + 2\beta$ d'où $\alpha + 2\beta = -1$ (b)

(a) et (b) forment un système $\begin{cases} \alpha - \beta = 2 \\ \alpha + 2\beta = -1 \end{cases} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & +2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ qui a une sol. unique ssi $\det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & +2 \end{pmatrix} \neq 0$. En effet, il vaut $3 \neq 0$.
C'est donc un syst. de Cramer dont les sol. sont :

$$\alpha = \frac{\det\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}{3} = 1 \ ; \ \beta = \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}{3} = -1 .$$

d'où l'unique reste possible : $R(X) = 1 - X$.

EXERCICE 3 :

1 (i) $\Leftrightarrow \begin{cases} 1+1+a+b+c = 2 \\ 16-8+4a-2b+c = 8 \\ 1-1+a-b+c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c = 0 \\ 4a-2b+c = 0 \\ a-b+c = 1 \end{cases}$ notons-le (S)

$\Leftrightarrow A \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2 $\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rang} A = 3$ (= nb. de lignes non toutes nulles)
Or A est matrice 3×3 donc $\text{rang} A = 3 \Rightarrow A$ inversible
$\Rightarrow \exists! \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

3 a $\det A = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1\cdot(-6)\cdot 1 = -6 \neq 0$
On sait déjà que (S) est syst. de Cramer (car $\exists A^{-1}$).

b $$a = \frac{\det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}}{\det A} = \frac{1\cdot(-1)^{3+1}\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}}{-6} = -\frac{1}{2}$$

$$b = \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}{\det A} = \frac{1\cdot(-1)^{3+2}\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}}{-6} = -\frac{1}{2}$$

$$c = \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}}{\det A} = \frac{1\cdot(-1)^{3+3}\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}}{-6} = 1$$

EXERCICE 4 :

① $\phi(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$; $\phi(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix}2\\-4\\2\end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$; $\phi(\vec{e}_3) = \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$

①' ← question pas donnée à l'examen

$\phi(x_1,x_2,x_3) = \phi(x_1\cdot\vec{e}_1 + x_2\cdot\vec{e}_2 + x_3\cdot\vec{e}_3) \underset{\phi \text{ linéaire}}{=} \sum_{i=1,2,3} x_i\,\phi(\vec{e}_i) \underset{(1)}{=} (x_1+2x_2+x_3, -3x_1-4x_2-2x_3, 2x_1+2x_2+x_3)$

② $\operatorname{rang}\phi = \operatorname{rang} M_{\tilde{\mathcal{B}}}\phi$ $\forall \tilde{\mathcal{B}}$ base de $\mathbb{R}^3$ donc $= \operatorname{rang} A$

On calcule rang A par pivot de Gauss mais on se simplifie la tache en calculant $\operatorname{rang}A^t = \operatorname{rang}A$:

$\operatorname{rang}A^t = \operatorname{rang}\begin{pmatrix}1&-3&2\\2&-4&2\\1&-2&1\end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix}1&-3&2\\0&2&-2\\0&0&0\end{pmatrix} = 2.$

③ Théoreme du rang pour $\phi : E \to F$ linéaire :

$\dim E = \dim \operatorname{Ker}\phi + \operatorname{rang}\phi$.

Ds. notre cas : $E = \mathbb{R}^3$ donc $\dim\operatorname{Ker}\phi = 3-2 = 1$.

④ $\operatorname{Ker}\phi = \{\vec{x}\in\mathbb{R}^3 \mid \phi(\vec{x}) = \vec{0}\}$. Ou bien, en termes de matrices, ds. la base $\mathcal{B}$: $\vec{x} = \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ et $\phi(\vec{x}) = \vec{0}$ équivaut à $A\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$. Or, par pivot :

$\begin{pmatrix}\boxed{1}&2&1\\-3&-4&-2\\2&2&1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&2&1\\0&2&1\\0&-2&-1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&2&1\\0&2&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ donc

$\phi(\vec{x}) = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases}a+2b+c=0\\ 2b+c=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=0\\2b+c=0\end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases}a=0\\ b\equiv b & \leftarrow \text{(on le prends comme paramètre)}\\ c=-2b\end{cases}$

Donc $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \in \operatorname{Ker}\phi$ ssi $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = b\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$, d'où

$\operatorname{Ker}\phi = \operatorname{Vect}\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}_{\mathcal{B}}\right\}$. Soit $\vec{k} = \begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$.

⑤ On sait $\operatorname{Im}\phi = \operatorname{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}_{\mathcal{B}}; \begin{pmatrix}2\\-4\\2\end{pmatrix}_{\mathcal{B}}; \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}_{\mathcal{B}}\right\}$ mais on sait aussi depuis (3) que le rang de ce syst. de vecteurs $= 2 \Leftrightarrow$ il n'y a que deux qui sont linéairement indépendents : par ex. $\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$ (car $\begin{pmatrix}2\\-4\\2\end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = 2\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$).

Donc $\operatorname{Im}\phi = \operatorname{Vect}\left\{\underbrace{\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}_{\mathcal{B}}}_{\vec{\imath}}; \underbrace{\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}_{\mathcal{B}}}_{\vec{\jmath}}\right\}$.

⑥ On pourrait calculer le déterminant

$\det\begin{pmatrix}0&1&1\\1&-3&-2\\-2&2&1\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}0&1&1\\1&-3&-2\\0&-4&-3\end{pmatrix} = 1\cdot(-1)^{2+1}\det\begin{pmatrix}1&1\\-4&-3\end{pmatrix} = -1 \neq 0$

ce qui montre que la matrice dont les 3 vect $\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}$ sont colonnes est de rang 3 donc $\{\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\}$ est syst. libre

⑦ $\mathcal{B}'$ base de $\mathbb{R}^3 \Rightarrow \mathcal{B}'$ engendre $\mathbb{R}^3 \Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}^3\ \exists\lambda,\mu,\gamma\in\mathbb{R}$ t.q.

$\vec{x} = \lambda\vec{k} + \mu\vec{\imath} + \gamma\vec{\jmath}$. Or $\lambda\vec{k}\in\operatorname{Ker}\phi$ et $\mu\vec{\imath}+\gamma\vec{\jmath}\in\operatorname{Im}\phi$ donc $\exists\vec{y}\in\operatorname{Ker}\phi$ et $\exists\vec{z}\in\operatorname{Im}\phi$ t.q. $\vec{x} = \vec{y}+\vec{z}$, donc $\mathbb{R}^3 \subset \operatorname{Ker}\phi + \operatorname{Im}\phi$. (L'inclusion inverse est triviale, vu que $\operatorname{Ker}\phi$ et $\operatorname{Im}\phi$ sont s.e.v. de $\mathbb{R}^3$.)

Aussi, la décomposition précédente de $\vec{x}$ est unique car $\mathcal{B}' = \{\vec{k},\vec{\imath},\vec{\jmath}\}$ est syst. libre donc $\vec{x} = \vec{y}+\vec{z}$ est aussi unique $\Rightarrow$ la somme est directe

⑧ $P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \left(\boxed{\vec{\imath}}_{\mathcal{B}}\ \boxed{\vec{\jmath}}_{\mathcal{B}}\ \boxed{\vec{k}}_{\mathcal{B}}\right) = \begin{pmatrix}1&1&0\\-3&-2&1\\2&1&-2\end{pmatrix}$

⑨ On doit résoudre le système (de Cramer) :

$\begin{cases}\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3 = \vec{\imath}\\ \vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3 = \vec{\jmath}\\ \vec{e}_2 - 2\vec{e}_3 = \vec{k}\end{cases} \underset{\text{Pivot}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases}\text{— (idem)} \\ \vec{e}_2 - \vec{e}_3 = -\vec{\imath}+\vec{\jmath}\\ \vec{e}_2 - 2\vec{e}_3 = \vec{k}\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}\text{— (idem)}\\ \text{— (idem)}\\ -\vec{e}_3 = \vec{\imath}-\vec{\jmath}+\vec{k}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\vec{e}_1 = -3\vec{\imath}+4\vec{\jmath}-\vec{k} = \begin{pmatrix}-3\\4\\-1\end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}\\ \vec{e}_2 = -2\vec{\imath}+2\vec{\jmath}-\vec{k} = \begin{pmatrix}-2\\2\\-1\end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}\\ \vec{e}_3 = -\vec{\imath}+\vec{\jmath}-\vec{k} = \begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}\end{cases}$

d'où $P_{B'B} = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ et on peut se confirmer ce résultat en calculant $P_{BB'} \cdot P_{B'B} = \mathbb{1}_3$.

(10) Sachant que $M_{BB'}\,Id = P_{B'B}$ (Id = application identique) on a le "diagramme commutatif" suivant :

$$\begin{tikzcd} (\mathbb{R}^3, B) \arrow[r, "M_B \phi"] & (\mathbb{R}^3, B) \arrow[d, "M_{BB'}\,Id"] \\ (\mathbb{R}^3, B') \arrow[u, "M_{B'B}\,Id"] \arrow[r, "M_{B'} \phi"'] & (\mathbb{R}^3, B') \end{tikzcd}$$

où $\phi = Id \circ \phi \circ Id$ s'écrit au niveau des matrices (cf. schéma) :

$$M_{B'}\phi = (M_{BB'}\,Id) \cdot (M_B \phi) \cdot (M_{B'B}\,Id)$$

ou, avec les notations du sujet :

$$A' = P^{-1} A P.$$

(11) On doit multiplier les 3 matrices du membre de droite de l'égalité ci-dessus

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & -4 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc $A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(qui est bien sûr de rang = 2 tout comme A)