L1-M2 2010/2011 **20 juin 2011 - Session 2**

Examen de Mathématiques (M2)

Durée: **2** heures

Les documents, les calculatrices et les téléphones portables ne sont pas autorisées

---

Exercice 1 : Soient $a, b > 0$ et $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Soit la famille de polynômes $P = X^n - aX + b$ (indexés par a, b, n).

1. (a) Montrer que si P admet une racine (au moins) triple, alors nécessairement on a $a = b = 0$.
   (b) Combien vaut alors cette racine et quel est son vrai ordre de multiplicité ?
2. (a) Montrer que si P admet une racine exactement double, alors on a $\left(\frac{a}{n}\right)^n = \left(\frac{b}{n-1}\right)^{n-1}$.
   (b) Vérifier que le polynôme $Q = X^3 - 3X + 2$ se trouve dans ce cas et trouver sa racine double.
   (c) En déduire la valeur de son autre racine et donner une factorisation de Q en facteurs irréductibles sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2 : Soit la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -4 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. A est-elle inversible ?
2. Calculer son rang.

Exercice 3 : Soit $\mathbb{R}_2[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré ≤ 2. Soit f l'application de $\mathbb{R}_2[X]$ dans lui-même définie par :

$$f(P) = (X - 1)P', \quad \forall P \in \mathbb{R}_2[X]$$

où P' est le polynôme dérivée de P.

1. Montrer que f est application linéaire.
2. Calculer $f(1)$, $f(X)$, $f(X^2)$, à savoir les polynômes image de f relativement à la base canonique $\mathcal{B} = \{1, X, X^2\}$ de $\mathbb{R}_2[X]$.
3. En déduire la matrice de f relativement à la base canonique $\mathcal{B} = \{1, X, X^2\}$ de $\mathbb{R}_2[X]$. On la notera par A.
4. Apporter A par le pivot de Gauss à une forme de matrice triangulaire supérieur, qu'on notera par A'.
5. En déduire le rang de A' (donc celui de A et par consequent celui de f).
6. En déduire la dimension de l'espace noyau de f, noté Ker$f$.
7. Déterminer une base de Ker$f$ et une base de l'espace image de f, noté Imf.
8. f est-elle injective ? surjective ? bijective ?
9. Montrer que Ker$f$ et Imf sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_2[X]$.
