L1-M2 2010/2011 **10 mai 2011 - Session 1**

Examen de Mathématiques (M2)

Durée: **3** heures

Les documents, les calculatrices et les téléphones portables ne sont pas autorisées

---

Exercice 1 : On considère les sous-ensembles de $\mathbb{R}$ suivants :

$$E = \{a + b\pi \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \text{ et } F = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$$

1. Montrer que $(E, +)$ et $(F, +)$ sont sous-groupes de $(\mathbb{R}, +)$.
2. On suppose connu le fait qu'il n'existent pas de $p, q \in \mathbb{Q}$ tels qu'on ait $\pi^2 = p\pi + q$.
   (a) Montrer que si $\alpha, \beta \in F$ alors le produit $\alpha\beta \in F$ (on dit que F est stable par multiplication)
   (b) Montrer que E n'est pas stable par multiplication.
   (c) Montrer que l'inverse de $a + b\sqrt{3}$ existe dans F si et seulement si on a
   $$\frac{a}{a^2 - 3b^2} \in \mathbb{Z} \text{ et } \frac{b}{a^2 - 3b^2} \in \mathbb{Z}$$
   (d) Montrer que les seuls éléments de E qui possèdent un inverse dans E par rapport à la multiplication sont 1 et -1.

Exercice 2 : Soit $\mathbb{Z}[X]$ l'ensemble des polynômes $P = a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n$, $n \in \mathbb{N}$, à coefficients entiers.

1. Montrer que pour de tels polynômes P, si $\alpha \in \mathbb{Z}$ est racine de P alors α divise a_0.
2. Donner une décomposition en facteurs irréductibles sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$ du polynôme $Q = 1 + X + X^2 + X^3$. (Indication : on pourrait utiliser la question précedente ou bien le fait que $X^4 - 1 = (X - 1)Q$)
3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le polynôme $P_n = 1 + X + X^{4n+2} + X^{4n+3}$ est divisible par le polynôme Q.
4. Montrer que le carré du polynôme Q, noté Q^2, ne divise pas le polynôme P_n.

Exercice 3 : Soit φ l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même définie par

$$\varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3x_1 - 4x_2 - 2x_3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 \end{pmatrix}$$

1. Donner la matrice A de φ relativement à la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$.

   Soient maintenant
   $$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$
2. Calculer le déterminant de la matrice dont les trois colonnes sont, dans l'ordre, v_1, v_2, et v_3. En déduire que ces trois vecteurs forment une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$.
3. Calculer $\varphi(v_1)$, $\varphi(v_2)$, $\varphi(v_3)$ et les exprimer en fonction de v_1, v_2, v_3. En déduire la matrice A' de φ relativement à la base $\mathcal{B}' = \{v_1, v_2, v_3\}$.
4. Écrire la matrice de passage $P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$, depuis la base canonique $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{B}'$. On la notera P.
5. Calculer son inverse P^{-1}.
6. Quelle est la relation entre A, P, P^{-1} et A' ? (justifier brièvement)
7. Retrouver la valeur de A déduite à la question 1.
8. Quel est le rang de φ ? Calculer la dimension de l'espace noyau Kerφ.
9. Donner une base de l'espace image Imφ.
10. Donner une base de l'espace Kerφ.
11. Montrer que Kerφ et Imφ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.