CORRIGÉ de L'EXAMEN de MATHEMATIQUES L1-S2

SESSION 2 – 20 juin 2011 (2010-2011)

EXERCICE 1 : (1.a,b) P admet racine α de multiplicité au moins 3 ssi $P(\alpha) = P'(\alpha) = P''(\alpha) = 0$, i.e. $\alpha^n - a\alpha + b = 0 = n\alpha^{n-1} - a = 0 = n(n-1)\alpha^{n-2}$. Comme $n \neq 0$ et $n \neq 1$, ceci équivaut à $\alpha = 0$, $a = b = 0$. Donc le seul polynôme admettant racine triple est X^3 et $\alpha = 0$.

(2.a) α est racine exactement double ssi $P(\alpha) = P'(\alpha) = 0$ et $P''(\alpha) \neq 0$. Ce dernier équivaut à $\alpha \neq 0$ et les autres deux égalités équivalent à $\alpha = \left(\frac{a}{n}\right)^{1/n-1}$ et $\alpha^n - n\alpha\alpha^{n-1} = -b$ d'où la relation recherchée entre a, b, n.

(2.b) Pour $n = 3$, $a = 3$ et $b = 2$ dans P, on obtient Q. Bien sûr $\alpha = 0$ n'est pas racine de Q (d'ailleurs $Q \neq X^3$) donc si α = racine double de Q alors $\alpha = \left(\frac{a}{n}\right)^{1/n-1} = \left(\frac{3}{3}\right)^{1/2} = 1$ et $1 = \left(\frac{2}{3-1}\right)^2$ est vérifié, et réciproquement.

(2.c) De (2.b) : $Q = (X-1)^2(pX+q)$ où p et q sont déterminés par division euclidienne $\Rightarrow Q = (X-1)^2(X+2)$.

EXERCICE 2 : Pour (1&2) méthode (I) : à l'aide des déterminants : $\det A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$ donc A n'est pas inversible et elle contient une matrice mineure 2×2 (par ex $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$) dont le dét. est $\neq 0 \Rightarrow$ Rang $A = 2$.

Meth II : Pivot de Gauss.

$$A \sim \begin{pmatrix} -3 & -4 & -2 \\ 0 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & 4/3 & 2/3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -3 & -4 & -2 \\ 0 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Big\}$$ 2 lignes non toutes nulles dans la forme triangulaire $\Rightarrow$ $\Rightarrow \text{rang}\,A = 2$

or $A \in M_3(\mathbb{R})$ donc n'est pas inversible car

EXERCICE 3 : (1) $\forall P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ on a :

$f(P+\lambda Q) = (X-1)(P+\lambda Q)' = (X-1)P' + \lambda(X-1)Q' = f(P) + \lambda f(Q)$.

(2) $$\begin{cases} f(1) = 0 \equiv 0\cdot 1 + 0\cdot X + 0\cdot X^2 \\ f(X) = X - 1 = (-1)\cdot 1 + 1\cdot X + 0\cdot X^2 \\ f(X^2) = 2X(X-1) = 0\cdot 1 + (-2)X + 2X^2 \end{cases}$$

(3) $\Rightarrow A \equiv \text{Mat}_{B} f = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(4) $A \sim \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv A'$

(5) rang $A' = 2$ car elle a une colonne (et ligne) toute nulle (dans sa forme triangularisée). Donc rang A' = rang A = rang $f = 2$.

(6) Par le Thm. du rang : $\dim \mathbb{R}_2[X] = \text{Rang} f + \dim \text{Ker} f$ $\Leftrightarrow 3 = 2 + \dim \text{Ker} f \Leftrightarrow \dim \text{Ker} f = 1$.

(7) On sait depuis (6) qu'il nous faut un seul vecteur $\neq 0$ pour engendrer Ker f. Or, à (2) on a vu que $f(1) = 0$, donc $\text{Ker} f = \text{Vect}\{1\}$ (où $1 = X^0 \in \mathbb{R}_2[X]$)

On sait que $\text{Im} f = \text{Vect}\{f(1), f(X), f(X^2)\}$ et que rang $f = \dim \text{Im} f = 2$ donc en éliminant $f(1) = 0$ on arrive à un système libre $\{f(X), f(X^2)\}$ de deux vecteurs qui engendre Im f (de dim = 2), donc on a à faire bien à une base de Im f.

(8) f injective ssi $\text{Ker} f = \{0\}$, or ce n'est pas le cas (cf. 7). Aussi f surjective ssi $\text{Im} f = \mathbb{R}_2[X]$ ce qui est faux car Im f est de dim $2 \lneq 3 = \dim \mathbb{R}_2[X]$. Donc f n'est pas surjective.

(9) On a $\mathbb{R}_2[X] = \text{Ker} f \oplus \text{Im} f$ car le bilan des dimensions est correct $3 = 1 + 2$ et on a $\mathbb{R}_2[X] = \text{Ker} f + \text{Im} f$ car $\forall P \in \mathbb{R}_2[X]$ il se décompose selon B' comme :

$P = \underbrace{a_0 \cdot 1}_{\in \text{Ker} f} + \underbrace{a_1 f(X) + a_2 f(X^2)}_{\in \text{Im} f}$ d'une façon unique car $B' = \{1, f(X), f(X^2)\}$ est base aussi