CORRIGÉ de l'EXAMEN de MATHEMATIQUES (M2)

2010 – 2011 – SESSION 1 (10 mai 2011)

EXERCICE 1 : ① $\emptyset \neq \mathbb{Z} \subseteq E, F$, donc $E \neq \emptyset \neq F$.

• $\forall a,b,c,d \in \mathbb{Z}$ on a : $(a+b\pi)+(c+d\pi) = (a+c)+(b+d)\pi \in E$
$(a+b\sqrt{3})+(c+d\sqrt{3}) = (a+c)+(b+d)\sqrt{3} \in F$

• $\forall a,b \in \mathbb{Z}$ on a : $-a,-b \in \mathbb{Z}$, donc $-(a+b\pi) = -a-b\pi \in E$ et de même $-(a+b\sqrt{3}) = -a-b\sqrt{3} \in F$.

(2.a) On pose $\alpha = a+\sqrt{3}b$, $\beta = c+\sqrt{3}d$ avec $\forall a,b,c,d \in \mathbb{Z}$.
Alors $\alpha\beta = (ac+3bd) + \sqrt{3}(bc+ad) \in F$.

(2.b) Soit $\alpha = a+\pi b$ et $\beta = c+\pi d$. Alors on a :
$\alpha\beta = ac + \pi(bc+ad) + \pi^2 bd$ et si on suppose $\alpha\beta \in E$ alors $\exists x,y \in \mathbb{Z}$ t.q. $\alpha\beta = x+\pi y$. Ceci revient à : $\dfrac{x-ac}{bd} + \pi\,\dfrac{y-bc-ad}{bd} = \pi^2$
(on a le droit de choisir $b,d \in \mathbb{Z}^*$) ce qui contredit l'hypothèse, à savoir $\nexists\, p,q \in \mathbb{Q}$ t.q. $p+\pi q = \pi^2$.

(2.c) L'inverse $x+y\sqrt{3} \in F$ de $a+\sqrt{3}b$ est de la forme $1/(a+\sqrt{3}b)$ car $F \subseteq \mathbb{R}$, donc il s'agit de trouver les $x,y \in \mathbb{Z}$ t.q. $(x+\sqrt{3}y)(a+\sqrt{3}b) = 1$
$\Leftrightarrow 1-xa-3yb = \sqrt{3}(ay+bx) \Leftrightarrow \begin{cases} xa+3yb = 1 \\ ay+bx = 0 \end{cases}$ et
(la dernière equiv. est due au fait que le m. de gauche $\in \mathbb{Q}$ et celui de droite $\in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$). Ce syst. linéaire a une sol. unique ssi $\det\begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix} = a^2-3b^2 \neq 0$ et dans ce cas $x = \dfrac{a}{a^2-3b^2}$ et $y = \dfrac{b}{a^2-3b^2}$.

(2.d) On raisonne comme à (2.c) et on obtient la condition $(1-ax) + \pi(-ay-bx) = yb\pi^2$.
Cas 1 : $yb = 0$ donc soit $b = 0$ et dans ce cas $(a+b\pi)^{-1} = a^{-1}$, soit $y = 0$ et alors $1-ax = \pi bx$ ce qui ne peut se passer que si $1 = ax$ et $bx = 0$ ce qui entraîne $x = 0$ (impossible car alors $1 = 0$) ou $b = 0$ et à nouveau alors $(a+\pi b)^{-1} = a^{-1}$.
Cas 2 : On divise par $yb \neq 0$ et on obtient une expression du type $p+q\pi = \pi^2$ qui contredit l'hypothèse.
Conclusion : les seuls $a+\pi b$ inversibles en E sont ceux pour lesquels $b = 0$, i.e. les $a \in \mathbb{Z}^*$ qui vérifient $a^{-1} = 1/a \in \mathbb{Z}$. Il ne restent donc que $a \in \{-1,+1\}$.

EXERCICE 2 : ① Si $\alpha \in \mathbb{Z}$ racine de P alors $P(\alpha) = 0$
$\Leftrightarrow \alpha(a_1 + a_2\alpha + \dots + a_n\alpha^{n-1}) = a_0$ i.e. $\alpha \mid a_0$.

② On cherche, d'après (1) des racines α de Q parmi les diviseurs de $a_0 = 1$, i.e. $\alpha_1 = -1$ ou $\alpha_2 = 1$. On voit que $Q(-1) = 0$, donc $X+1$ divise Q, on fait la division euclidienne, et on obtient $Q = (X+1)(1+X^2) = (X+1)(X+i)(X-i)$
Ou, avec $X^4-1 = (X-1)Q$ on voit que les racines de Q sont les racines 4èmes de l'unité, sauf 1. Or celles-ci sont $e^{i\frac{2k\pi}{4}} = e^{i\frac{k\pi}{2}}$, $k \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, i.e. $1,-1,i,-i$.

③ Q divise P_n si toute racine de Q est racine de P_n.
On n'a donc qu'à vérifier que $P_n(\pm i) = P(-1) = 0$.

④ Q a des racines simples $-1, i, -i$, donc Q^2 aura les mêmes racines, mais de multiplicité 2.
Pour montrer que Q^2 ne divise pas P_n, il suffira d'en trouver une, qui n'est pas racine double de P_n, (i.e. qu'on ait aussi $P_n'(\alpha) = 0$. (où $\alpha = -1$, ou $= \pm i$).)
Or $P_n' = (4n+3)X^{4n+2} + (4n+2)X^{4n+1} + 1$ donc
$P_n'(-1) = 4n+3 + (4n+2)(-1) + 1 = 2 \neq 0$.

EXERCICE 3 : $\mathcal{B}$ canonique : $\left\{ e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}; e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}; e_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$

① $\begin{cases} \varphi(e_1) = \begin{pmatrix}-3\\1\\2\end{pmatrix} \\ \varphi(e_2) = \begin{pmatrix}-4\\2\\2\end{pmatrix} \\ \varphi(e_3) = \begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix} \end{cases} \Rightarrow \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\varphi = \begin{pmatrix} -3 & -4 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

② $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$.

On a donc un syst. de vect. linéairement indépendants (car la cond. que $\mathcal{B}'$ soit libre conduit à un syst. dég. homogène dont le dét. est celui de ci-dessus, donc ce sera un syst. de Cramer $\Rightarrow$ la seule sol. est la sol. triviale) et card $\mathcal{B}' = 3 = \dim \mathbb{R}^3$ ce qui nous dispense de vérifier que Vect $\mathcal{B}' = \mathbb{R}^3$. Il résulte que $\mathcal{B}'$ = base de $\mathbb{R}^3$.

③ Par calcul : $\varphi(v_1) = v_1$; $\varphi(v_2) = -v_2$; $\varphi(v_3) = 0_{\mathbb{R}^3}$

$\Rightarrow \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

④ $P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}\,\mathrm{Id}$. On a :

$(S)\begin{cases} \mathrm{Id}(v_1) \equiv v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = e_1 - e_2 \\ \mathrm{Id}(v_2) \equiv v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = -e_1 + e_3 \\ \mathrm{Id}(v_3) \equiv v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = -e_2 + 2e_3 \end{cases}$

$\Rightarrow P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \equiv P$

⑤ Pour calculer P^{-1} on résoud le système (S) ci-dessus en inconnues e_1, e_2, e_3. On a, par pivot :

$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -1 & 0 & v_1 \\ -1 & 0 & +1 & v_2 \\ 0 & -1 & 2 & v_3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & v_1 \\ 0 & \boxed{-1} & +1 & v_1+v_2 \\ 0 & -1 & 2 & v_3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 0 & v_1 \\ 0 & -1 & +1 & v_1+v_2 \\ 0 & 0 & 1 & v_1+v_2+v_3 \end{array}\right)$

Donc $(S) \Leftrightarrow \begin{cases} e_3 = v_1 + v_2 + v_3 \\ -e_2 + e_3 = + v_1 + v_2 \\ e_1 + e_2 = -v_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e_1 = v_1 + 2v_2 + v_3 \\ e_2 = -2v_1 - 2v_2 + v_3 \\ e_3 = v_1 + v_2 + v_3 \end{cases}$

$\Rightarrow P^{-1} = P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}\,\mathrm{Id} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \\ +1 & +1 & 1 \end{pmatrix}$

⑥ On a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}') & \xrightarrow{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}\varphi = A'} & (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}') \\ \uparrow P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = P^{-1} & & \downarrow P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} \equiv P \\ (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}) & \xrightarrow{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\varphi = A} & (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}) \end{array}$$

d'où

$$\boxed{A = PA'P^{-1}} \quad (*)$$

⑦ Simple calcul basé sur $(*)$ de ⑥ et sur les matrices déduites à (3) et (5).

⑧ Le rang$\varphi := \dim \mathrm{Im}\varphi$ est le même que celui de toute matrice de φ dans n'importe quelle base. Alors on choisit $A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}\varphi$ car très simple (diagonale) et c'est le nb. de lignes/colonnes non toutes nulles, à savoir 2. Donc $\underline{\mathrm{rang}\,\varphi = 2}$.

Le thm. du rang dit : $\dim \mathbb{R}^3 = \dim \mathrm{Ker}\varphi + \mathrm{rang}\varphi$

Donc $\underline{\dim \mathrm{Ker}\varphi = 3 - 2 = 1}$.

⑨ On sait que $\mathrm{Im}\varphi \subseteq \mathrm{Vect}\{\varphi(v_1), \varphi(v_2), \varphi(v_3)\}$ (mais la même chose est vraie si on remplace v_1, v_2, v_3 par les vecteurs de toute autre base de $\mathbb{R}^3$). Or $\varphi(v_3) = 0_{\mathbb{R}^3}$ donc les 3 vect. ci-dessus ne peuvent former un système libre. Par contre rang$\varphi = 2$ dit qu'on a besoin de 2 vecteurs pour engendrer $\mathrm{Im}\varphi$ donc $\mathrm{Im}\varphi = \mathrm{Vect}\{\varphi(v_1), \varphi(v_2)\} = \mathrm{Vect}\{v_1, v_2\}$

⑩ $\mathrm{Ker}\varphi := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}\varphi \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'} \right\}$.

(Obs : on a choisit de travailler ds. $\mathcal{B}'$ car tous les objets sont très simples). L'equation ci-dessus équivaut au système : $x = 0 = y$ et z quelconque $\in \mathbb{R}$. Donc

$\mathrm{Ker}\varphi = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}\right\} = \mathrm{Vect}\{v_3\}$ ← (Obs : c'était visible directement de $\varphi(v_3) = 0$)

⑪ Pour avoir $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}\varphi \oplus \mathrm{Im}\varphi$ il suffit de montrer que $\dim \mathbb{R}^3 = \dim \mathrm{Ker}\varphi + \dim \mathrm{Im}\varphi$ (vrai, car c'est le Thm du rang !) et que $\mathrm{Ker}\varphi \cap \mathrm{Im}\varphi = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ ce qui équivaut à m.q. les vect. des bases de $\mathrm{Ker}\varphi$ et de $\mathrm{Im}\varphi$ forment un syst. libre. Mais celui-ci est $\mathcal{B}'$ donc libre.