Université de Cergy-Pontoise - L1-S2

Examen de Mathématiques (M2)

Session 2 - Mardi 15 juin 2010

Durée : 2h - Ni document ni calculatrice ni téléphone mobile autorisés

Notations :
- les vecteurs sont notés en gras.
- $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices carrées réelles de taille 2.

Exercice I (3 pts) Soit $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$. On note $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -2 & k \\ -\frac{2}{k} & 1 \end{pmatrix}$$

1) Calculer A^2 et montrer que $A^2 + A = 0$.
2) En déduire que $A^3 = A$ sans calculer A^3.

Exercice II (5 pts) Pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on considère le polynôme

$$P(X) = aX^4 + bX^3 + 1.$$

1) Quel est le degré de $P(X)$? Discuter suivant les valeurs de a et de b.
2) Montrer que 1 est racine double de $P(X)$ si et seulement si

$$\begin{cases} a + b + 1 = 0 \\ 4a + 3b = 0 \end{cases}$$

et préciser les valeurs correspondantes de a et de b.
3) Pour les valeurs de a et de b trouvées au 2), vérifier que $(X-1)^2$ divise $P(X)$ et en déduire la factorisation de $P(X)$ sur $\mathbb{R}[X]$.

Exercice III (12 points)
On munit $\mathbb{R}^3$ de sa base canonique $\mathcal{B} = (\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3})$. On définit l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ par :

$$\text{si } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \quad \text{alors } f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -x_1 + x_3 \\ -2x_1 + x_3 \\ -x_1 \end{pmatrix}.$$

1) Calculer $f(\mathbf{e_1})$, $f(\mathbf{e_2})$, $f(\mathbf{e_3})$. En déduire la matrice A de l'endomorphisme f dans la base $\mathcal{B}$.
2) Montrer que $Ker(f) = Vect(\mathbf{e_2})$.
3) On note $\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{v_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que $(\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3})$ est une base de $\mathbb{R}^3$, que l'on note $\mathcal{B}'$.
b) Montrer que

$$f(\mathbf{v_1}) = -\mathbf{v_1} - \mathbf{v_2}, \quad f(\mathbf{v_2}) = \mathbf{v_1}.$$

c) Soit A' la matrice de l'endomorphisme f dans la base $\mathcal{B}'$. Déterminer A'.
d) On note Q la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$. Déterminer Q. Montrer que Q est inversible et que

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e) Quelle relation y a t-il entre A, A', Q et Q^{-1} ?
4) Quel est le rang de f ?
5) Montrer que $Im(f) = Vect(\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2})$
6) En déduire que $Im(f) \oplus Ker(f) = \mathbb{R}^3$.