Université de Cergy-Pontoise - L1-M2
Examen - Session 1 - Mardi 18 mai 2010

Durée: 3h
Documents, calculatrice, téléphone et ordinateur portable ne sont pas autorisés.
Les 3 exercices sont indépendants.

Notations:
- les vecteurs sont notés en gras.
- $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices carrées réelles de taille 2.
- $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices carrées réelles de taille 3.

Exercice I (4 pts) Soit E l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de la forme

$$M = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

avec $a \in \mathbb{R}$.

1) Soient $M_1 \in E$ et $M_2 \in E$. Calculer le produit M_1M_2. En déduire que la multiplication est une loi de composition interne dans E.

2) E admet-il un élément neutre pour la multiplication ? Montrer que toute matrice de E admet une matrice inverse dans E, que l'on précisera.

3) Conclure que $(E, \cdot)$ est un groupe. Est-il commutatif ?

Exercice II (5 pts)
On considère le polynôme

$$P(X) = X^4 - 4X^3 + 9X^2 - 20X + 20$$

1) Montrer que 2 est racine du polynôme $P(X)$. Quel est son ordre de multiplicité ?

2) On rappelle que $i \in \mathbb{C}$ vérifie $i^2 = -1$.
a) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$P(ti) = (t^4 - 9t^2 + 20) + 4t(t^2 - 5)i$$

b) En déduire que $P(X)$ admet deux racines imaginaires pures de la forme $\pm t_0 i$ avec $t_0 > 0$, que l'on précisera.
3) Montrer que

$$P(X) = (X - 2)^2(X^2 + t_0^2)$$

Exercice III (11 pts)
On note $\mathcal{B} = \{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}\}$ la base canonique de $I\!R^3$.
On considère les trois vecteurs suivants de $I\!R^3$:

$$\mathbf{f_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f_3} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1) Montrer que $\{\mathbf{f_1}, \mathbf{f_2}, \mathbf{f_3}\}$ est une base de $I\!R^3$, que l'on note $\mathcal{B}'$.
Soit u l'endomorphisme de $I\!R^3$ tel que

$$u(\mathbf{f_1}) = \mathbf{f_1}, \;\; u(\mathbf{f_2}) = 0, \;\; u(\mathbf{f_3}) = 2\mathbf{f_3}.$$

2) Soit A' la matrice de u dans la base $\mathcal{B}'$. Déterminer A'.
3) a) Exprimer les vecteurs $\mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_2}$ et $\mathbf{e_3}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\{\mathbf{f_1}, \mathbf{f_2}, \mathbf{f_3}\}$.
b) En déduire l'expression de $u(\mathbf{e_1})$, $u(\mathbf{e_2})$ et $u(\mathbf{e_3})$ en fonction de $\{\mathbf{f_1}, \mathbf{f_2}, \mathbf{f_3}\}$, puis les coordonnées de $u(\mathbf{e_1})$, $u(\mathbf{e_2})$ et $u(\mathbf{e_3})$ dans la base $\mathcal{B}$.
c) Montrer que la matrice A de u dans la base $\mathcal{B}$ est

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

4) Montrer qu'il existe une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_3(I\!R)$, que l'on précisera, telle que

$$A = PA'P^{-1}$$

Que représente la matrice P^{-1} ? Montrer que

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

5) Montrer que

$$Ker(u) = Vect(\mathbf{f_2})$$

6) Quel est le rang de u ? Montrer que

$$Im(u) = Vect(\mathbf{f_1}, \mathbf{f_3})$$

En déduire que

$$Im(u) \oplus Ker(u) = I\!R^3.$$