L1-S2 - Corrigé de l'examen de MATHEMATIQUES (M2) - Session 2 - Mardi 15 juin 2010

I

1) $A^2 = \begin{pmatrix} -2 & +k \\ -\frac{2}{k} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & +k \\ -\frac{2}{k} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -k \\ \frac{2}{k} & -1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -2 & k \\ -\frac{2}{k} & 1 \end{pmatrix} = -A$

$\Rightarrow A^2 + A = 0$

2) $A^3 = A \times A^2 = A \times (-A) = -A^2 = +A$

II

1) Si $a \neq 0$, $d^\circ P = 4$

Si $a = 0$, $b \neq 0$, $d^\circ P = 3$

Si $a = b = 0$, $P(X) = 1 \Rightarrow d^\circ P = 0$

2) 1 racine double de $P(X) \Leftrightarrow P(1) = 0$ et $P'(1) = 0$

Or, $P'(X) = 4aX^3 + 3bX^2$

Donc $P(1) = 0 \Leftrightarrow a + b + 1 = 0$

$P'(1) = 0 \Leftrightarrow 4a + 3b = 0$

D'où : 1 racine double $\Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} a + b + 1 = 0 \\ 4a + 3b = 0 \end{cases}}$

(<u>Rem</u> : En fait, ces conditions sont équivalentes à : 1 racine

de $P(X)$ d'ordre au moins 2.
1 racine d'ordre exactement 2 impose de plus $P''(1) \neq 0$. Mais $P''(X) = 12aX^3 + 6bX^2$
$\rightarrow P''(1) = 12a + 6b = 6(2a+b) \neq 0$ pour les valeurs trouvées ci-dessous.)

$$\begin{cases} a+b+1=0 & (1) \\ 4a+3b=0 & (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+1=0 & (1) \\ a-3=0 & (2)-3(1) \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} b=-4 \\ a=3 \end{cases}}$$

(et $P''(1) = 6(6-4) = 12 \neq 0$)

3) $P(X) = 3X^4 - 4X^3 + 1$ admet donc 1 comme racine double $\Rightarrow (X-1)^2 \mid P(X)$

$\Rightarrow \exists\, q(X) \in \mathbb{R}[X] \,/\, P(X) = (X-1)^2 q(X)$

- Comme $d^\circ P = 4$, on doit avoir $d^\circ q = 2$
- De plus, le terme de plus haut degré est $3X^4$

d'où $q(X) = 3X^2 + \alpha X + \beta$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$

$$\rightarrow 3X^4 - 4X^3 + 1 = (X-1)^2(3X^2 + \alpha X + \beta)$$
$$= (X^2 - 2X + 1)(3X^2 + \alpha X + \beta)$$
$$= 3X^4 + \alpha X^3 + \beta X^2 - 6X^3 - 2\alpha X^2 - 2\beta X + 3X^2 + \alpha X + \beta$$
$$= 3X^4 + (\alpha - 6)X^3 + (\beta - 2\alpha + 3)X^2 + (\alpha - 2\beta)X + \beta$$

Par identification, on a :

$$\begin{cases} \alpha - 6 = -4 \\ \beta - 2\alpha + 3 = 0 \\ \alpha - 2\beta = 0 \\ \beta = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = 1 \end{cases}$$

$$\rightarrow \boxed{P(X) = (X-1)^2(3X^2+2X+1)} \quad (*)$$

• $q(X) = 3X^2 + 2X + 1 \Rightarrow \Delta = 2^2 - 4\times 3 = -4\times 2 = -8 < 0$

$\Rightarrow q(X)$ n'a pas de racines réelles, $\underset{d^\circ q = 2}{\Rightarrow}$ $q(X)$ irréductible sur $\mathbb{R}[X]$

Donc la factorisation de $P(X)$ sur $\mathbb{R}[X]$ est donnée par $(*)$.

Exercice III

1) $f(e_1) = f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-2\\-1\end{pmatrix}$

$f(e_2) = f\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

$f(e_3) = f\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$

D'où $\boxed{A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$

2) $\left.\begin{array}{l} \vec{x} \in \mathrm{Ker}\, f \\ \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \Leftrightarrow f(\vec{x}) = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 + x_3 = 0 \\ -2x_1 + x_3 = 0 \\ -x_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = x_2 \vec{e_2}$ avec $x_2 \in \mathbb{R}$

D'où $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(\vec{e_2})$

3) a) Soient $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 / \ \alpha \vec{v_1} + \beta \vec{v_2} + \gamma \vec{v_3} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \gamma = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}$

donc $(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3})$ est une famille <u>libre</u>. <u>3</u> vecteurs libres de <u>$\mathbb{R}^3$</u> forment une base donc $\mathcal{B}' = (\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3})$ est une <u>base de</u> $\mathbb{R}^3$.

b) $f(\vec{v_1}) = f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\vec{v_1} - \vec{v_2}$

$f(\vec{v_2}) = f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{v_1}$

c) $f(\vec{v_3}) = f(\vec{e_2}) = \vec{0}$ d'où $\boxed{A' = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$

d) On a $\begin{cases} v_1 = e_1 + e_2 \\ v_2 = e_2 + e_3 \\ v_3 = e_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} e_1 = v_1 - v_3 \\ e_3 = v_2 - v_3 \\ e_2 = v_3 \end{cases} \rightarrow \boxed{Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}}$ (5)

Comme $Q^{-1} = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$, on a $Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

e) $A' = P^{-1}AP$, où $P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$. Ici, $P = Q^{-1}$ et $P^{-1} = Q$

d'où $\boxed{A' = QAQ^{-1}}$ (ou : $A = Q^{-1}A'Q$)

4) D'après la question 2), $\dim(\operatorname{Ker} f) = 1$

D'après le théorème du rang, $rg(f) + \dim(\operatorname{Ker} f) = 3$

d'où $\boxed{rg(f) = 2}$

5) $rg(f) = \dim(\operatorname{Im} f) = 2$.

On remarque que $\vec{v_1} = f(\vec{v_2}) \Rightarrow \vec{v_1} \in \operatorname{Im} f$

et $f(\vec{v_1}) + f(\vec{v_2}) = -\vec{v_2} \Rightarrow \vec{v_2} = f(-\vec{v_1} - \vec{v_2}) \Rightarrow \vec{v_2} \in \operatorname{Im} f$

De plus, $(\vec{v_1}, \vec{v_2})$ est libre (car $(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3})$ l'est).

Donc $(\vec{v_1}, \vec{v_2})$ est un système <u>libre</u> de <u>2</u> <u>vecteurs de $\operatorname{Im} f$</u>

avec $\dim(\operatorname{Im} f) = 2$. C'est donc une <u>base</u> de $\operatorname{Im} f$.

D'où $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(\vec{v_1}, \vec{v_2})$

6) Comme $\mathcal{B}' = (\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3})$ est une <u>base</u> de $\mathbb{R}^3$, on a :

- $\operatorname{Vect}(\vec{v_3}) \cap \operatorname{Vect}(\vec{v_1}, \vec{v_2}) = \{\vec{0}\}$
- $\dim(\operatorname{Vect}(\vec{v_3})) + \dim(\operatorname{Vect}(\vec{v_1}, \vec{v_2})) = 1 + 2 = 3$

d'où $\operatorname{Vect}(\vec{v_1}, \vec{v_2}) \oplus \operatorname{Vect}(\vec{v_3}) = \mathbb{R}^3$

$\Rightarrow \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f = \mathbb{R}^3$