UNIVERSITÉ
de Cergy-Pontoise

CORRIGÉ de l'EXAMEN L1-S2-M2

MATHEMATIQUES 2

2009 - 2010 : SESSION 1 (18.05.2010)

LES FEUILLES SUIVANTES CONTIENNENT 2 CORRIGÉS DU MÊME SUJET.

LES ETUDIANTS POURRONT LES CONSULTER AVEC PROFIT CAR PARFOIS LA MÉTHODE DE RÉSOLUTION N'EST PAS LA MÊME.

Elisabeth LOGAK
& Andrei IFTIMOVICI

CORRIGÉ – Examen L1/M2 – Session 1 – 18 mai 2010

Exercice I

1) Soient $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & a_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} 1 & a_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Alors $\boxed{M_1 M_2 = \begin{pmatrix} 1 & a_1+a_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$. Donc $M_1 M_2 = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $a = a_1 + a_2 \in \mathbb{R}$, d'où : $M_1 M_2 \in E$, ce qui prouve que la multiplication est une <u>loi de composition interne dans E</u> : $\forall (M_1, M_2) \in E^2$, $M_1 M_2 \in E$

2) La matrice identité de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in E$ (obtenue pour $a=0$), c'est l'<u>élément neutre</u> pour la multiplication dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, donc dans E.

D'après le calcul du 1), on a : $\forall a \in \mathbb{R}$,

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

Donc l'inverse de la matrice de E, $M = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice $\boxed{M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$, qui appartient à E.

3) • est une <u>loi de composition interne</u> dans E

• est <u>associative</u> ds E car elle l'est dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

• admet un élément neutre dans E car $I_2 \in E$

Enfin, tout élément $M \in E$ a un inverse $M^{-1} \in E$

On en conclut que $(E, .)$ est un groupe

De plus, le calcul du 1) montre que :

$$\forall (M_1, M_2) \in E^2, \quad M_1 M_2 = M_2 M_1 = \begin{pmatrix} 1 & a_1 + a_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ce qui prouve que $(E, .)$ est un groupe commutatif.

Exercice II

1) $P(2) = 2^4 - 4 \times 2^3 + 9 \times 2^2 - 20 \times 2 + 20 = -16 + 9 \times 4 - 20 = 0$

$\Rightarrow$ 2 racine de $P(X)$.

$P'(X) = 4X^3 - 12X^2 + 18X - 20 \Rightarrow P'(2) = 4 \times 8 - 12 \times 4 + 18 \times 2 - 20$
$= -16 + 36 - 20 = 0$

$P''(X) = 12X^2 - 24X + 18 \Rightarrow P''(2) = 12 \times 4 - 24 \times 4 + 18 = -48 + 18$
$= -30 \neq 0$

donc $P(2) = P'(2) = 0$, $P''(2) \neq 0$ d'où : 2 racine double de $P(X)$

2) a) $P(ti) = t^4 - 4t^3 i^3 - 9t^2 - 20ti + 20$

$= (t^4 - 9t^2 + 20) + (4t^3 - 20t)\, i$

$= (t^4 - 9t^2 + 20) + 4(t^3 - 5t)\, i = (t^4 - 9t^2 + 20) + 4t(t^2 - 5)\, i$

b) On a $P(ti) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t^4 - 9t^2 + 20 = 0 & (1) \\ t^3 - 5t = t(t^2 - 5) = 0 & (2) \end{cases}$

D'après $t(t^2 - 5) = 0 \Rightarrow t = 0$ ou $t^2 = 5$

Pour $t = 0$, (1) n'est pas vérifiée.

Donc $t^2 = 5$ et en reportant dans (1), on a :

$$t^4 - 9t^2 + 20 = 25 - 9 \times 5 + 20 = 0$$ automatiquement

vérifié. D'où, en posant $\boxed{t_0 = \sqrt{5}}$,

$$P(t_0 i) = P(-t_0 i) = 0$$

3) $P(X)$ a donc pour racines complexes :

$$\begin{cases} 2, \text{ ordre} = 2 \\ t_0 i \\ -t_0 i \end{cases}$$

Cela prouve que $P(X)$ est <u>divisible</u> par

$$q(X) = (X-2)^2 (X - t_0 i)(X + t_0 i) = (X-2)^2 (X^2 + t_0^2)$$

De plus, $d^\circ P = 4 = d^\circ q$

et $P(X)$ et $q(X)$ ont comme terme dominant X^4

(coefficient dominant $= 1$).

On en déduit que

$$P(X) = q(X) = (X-2)^2 (X^2 + t_0^2)$$
$$= (X-2)^2 (X^2 + 5)$$

Exercice III

1) Soient $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 / \alpha \vec{f_1} + \beta \vec{f_2} + \gamma \vec{f_3} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta - \gamma = 0 \\ -\beta + \gamma = 0 \\ -\alpha + \gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = 0 \\ \beta = \gamma \\ \alpha = \gamma \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$$

donc les vecteurs $\{\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}\}$ forment une famille libre de $\mathbb{R}^3$. Comme $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$, cela prouve que $\{\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

2) $$\boxed{A' = \mathrm{Mat}(u, \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}$$

3) $$\begin{cases} f_1 = e_1 - e_3 \\ f_2 = e_1 - e_2 \\ f_3 = -e_1 + e_2 + e_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_1 + f_3 = e_2 \\ f_2 + f_3 = e_3 \\ f_1 + f_2 + f_3 = e_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} e_1 = f_1 + f_2 + f_3 \\ e_2 = f_1 + f_3 \\ e_3 = f_2 + f_3 \end{cases}}$$

Donc $u(e_1) = u(f_1+f_2+f_3) = u(f_1)+u(f_2)+u(f_3)$

$\Rightarrow u(e_1) = f_1 + 2f_3 = e_1 - e_3 + 2(-e_1+e_2+e_3)$

$\Rightarrow u(e_1) = -e_1 + 2e_2 + e_3$

$u(e_2) = u(f_1+f_3) = u(f_1) + u(f_3) = f_1 + 2f_3 = -e_1 + 2e_2 + e_3$

$u(e_3) = u(f_2) + u(f_3) = 2\underline{f_3} = -2e_1 + 2e_2 + 2e_3$

d'où $\boxed{A = \mathrm{Mat}(u, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}}$

4) La formule de changement de base pour la matrice de l'application linéaire u dit que

$$A' = P^{-1}AP \quad \text{où } P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \text{ est la}$$

$$\Rightarrow A = PA'P^{-1}$$

<u>matrice de passage</u> de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

Ici $\boxed{P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$. De plus, $P^{-1} = P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$ = matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$

d'où $\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$, d'après les expressions de (e_1, e_2, e_3) en fonction de (f_1, f_2, f_3) obtenues en 3)

5) $\vec{x} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}\, u \iff u(\vec{x}) = \vec{0} \iff A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

$\iff \begin{cases} \cancel{-x_1 - x_2 - 2x_3 = 0} \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$. Donc $\vec{x} = \begin{pmatrix}x_1\\-x_1\\0\end{pmatrix} = x_1\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} = x_1 \vec{f_2}$

D'où $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Vect}(\vec{f_2})$

6) D'après le théorème du rang,

$\mathrm{rg}(u) + \dim(\mathrm{Ker}\, u) = \dim(\mathbb{R}^3) = 3$

On $\mathrm{Ker}\, u = \mathrm{Vect}(\vec{f_2}) \Rightarrow \dim(\mathrm{Ker}\, u) = 1$

d'où $\boxed{\mathrm{rg}(u) = 3 - 1 = 2}$

On a : $u(\vec{e_3}) = \begin{pmatrix}-2\\2\\2\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} = 2\vec{f_3}$

donc $\cancel{\vec{f_3} \in \mathrm{Im}\, u}$ $\boxed{\vec{f_3} \in \mathrm{Im}\, u}$

et $u(\vec{e_3}) - u(\vec{e_1}) = \begin{pmatrix}-2\\2\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} = -\vec{f_1}$

$\Rightarrow \vec{f_1} = u(\vec{e_1} - \vec{e_3}) \Rightarrow \boxed{\vec{f_1} \in \mathrm{Im}\, u}$

De plus, $(\vec{f_1}, \vec{f_3})$ est une famille libre

~~car dim~~ donc $(\vec{f_1}, \vec{f_3})$ est une <u>base</u>

de Im u, car $\dim(\mathrm{Im}\, u) = rg(u) = 2$

D'où $\mathrm{Im}\, u = \mathrm{Vect}(\vec{f_1}, \vec{f_3})$

<u>Rq</u>: On pouvait aussi remarquer que:

$$\mathrm{Im}\, u = \mathrm{Vect}(u(f_1), u(f_2), u(f_3))$$
$$= \mathrm{Vect}(f_1, 0, 2f_3) = \mathrm{Vect}(f_1, f_3)$$

Comme $\{f_1, f_2, f_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$,

on a : $\mathrm{Vect}(\vec{f_1}, \vec{f_3}) \oplus \mathrm{Vect}(\vec{f_2}) = \mathbb{R}^3$

car 1) $\mathrm{Vect}(\vec{f_1}, \vec{f_3}) \cap \mathrm{Vect}(\vec{f_2}) = \vec{0}$

2) $\dim(\mathrm{Vect}(\vec{f_1}, \vec{f_3})) + \dim(\mathrm{Vect}(\vec{f_2})) = 2 + 1 = 3$

d'où $\boxed{\mathrm{Im}(u) \oplus \mathrm{Ker}(u) = \mathbb{R}^3}$

CORRIGÉ de l'EXAMEN de L1-S2-MATHEMATIQUES

2009-2010 : SESSION 1 (18 mai 2010)

EXERCICE I : (1) Soit $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $M_2 = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Alors :

$M_1 \cdot M_2 = \begin{pmatrix} 1 & a+b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. (Observation : $M_1 + M_2 = 2M_1M_2$)

Donc $M_1 \cdot M_2 \in E$ (et l'observation m.q. $M_1 + M_2 \notin E$)

(2) C'est l'élément neutre de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ à savoir $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ qui appartient à E car on n'a qu'à prendre $a = 0$.
L'inverse $M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ de $M = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ satisfait $MM^{-1} = M^{-1}M = I_2$
$\iff a + x = 0 \iff x = -a$. Donc $M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(3) $E \neq \emptyset$ car $I_2 \in E$. Pour m.q. $(E, \cdot)$ groupe il suffit de m.q. $(E, \cdot)$ est sous groupe de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \cdot)$. Or ceci est vrai car à (1) on a m.q. $M_1M_2 \in E$ si M_1 et $M_2 \in E$ et à (2) on a m.q. $M^{-1} \in E$, $\forall M \in E$. La commutativité du groupe $(E, \cdot)$ résulte de celle de l'addition en $\mathbb{R}$ (voir la forme de M_1M_2 en (1)) ou bien de l'obs. $M_1M_2 = \frac{1}{2}(M_1 + M_2)$ sachant que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +)$ est groupe commutatif.

EXERCICE II : (1) $P(2) = 16 - 4 \cdot 8 + 9 \cdot 4 - 20 \cdot 2 + 20 = 0$

(2)(a) $P(ti) = t^4 i^4 - 4t^3 i^3 + 9t^2 i^2 - 20ti + 20 \overset{\substack{i^2=-1 \\ i^3=-i \\ i^4=1}}{=}$
$= (t^4 - 9t^2 + 20) + i \cdot 4t(t^2 - 5)$

(b) Une racine r est de la forme ti équivaut, d'après (a) à : $\begin{cases} t^4 - 9t^2 + 20 = 0 \\ 4t(t^2-5) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} t = 0 \text{ ou } t = \pm\sqrt{5} \\ t^4 - 9t^2 + 20 = 0 \end{cases}$
$\iff t = \pm\sqrt{5}$ (car $t = 0$ ne convient pas à la 2ème éq.)

Donc $t_0 = \pm\sqrt{5}$ et les 2 racines demandées sont $\pm i\sqrt{5}$.

(3) $d^\circ P = 4$ et $d^\circ\left((X-2)^2(X^2+5)\right) = 4$ aussi. On sait que $X^2+5 = (X - (+i\sqrt{5}))(X - (-i\sqrt{5}))$ divise P d'après
(2b) et que $X - 2$ divise P d'après 1. Il suffira donc de m.q. 2 est racine double de P. On a :
$P'(X) = 4X^3 - 12X^2 + 9X - 20$ et donc :
$P'(2) = 4 \cdot 8 - 12 \cdot 4 + 9 \cdot 2 - 20 = 0$
donc 2 est racine double de P (car le terme dominant du P et de $(X-2)^2(X^2-5)$ est le même, à savoir $= 1$).

EXERCICE III : (1) $\operatorname{card}\{f_1, f_2, f_3\} = 3 = \dim \mathbb{R}^3$

Donc il suffit de m.q. : soit $\{f_1, f_2, f_3\}$ est libre, soit qu'il engendre $\mathbb{R}^3$. On choisit de m.q. il est libre.

i.e. $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3 = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0_{\mathbb{R}}$.

Ceci équivaut à montrer que le système :

$(S)\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ \quad - \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ -\alpha_1 \quad + \alpha_3 = 0 \end{cases}$ a comme unique solution la solution triviale : $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$

En faisant le pivot de Gauss sur (S) on a :

$(S) \iff \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ \quad -\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ 0 + \alpha_2 \quad = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ \quad -\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \quad \alpha_3 = 0 \end{cases}$

qui est un système homogène dont la matrice des coefficients est triangulaire supérieur et a le dét $= -1 \neq 0$. Donc c'est un syst. de Cramer homogène $\iff$ sa seule solution est celle triviale.

CORRIGÉ ALTERNATIF : $\{f_1, f_2, f_3\}$ est libre ssi la matrice formée par les vecteurs-colonne f_1, f_2, f_3 a un rang égal au nombre des vecteurs. Et c'est le cas ici. CONCLUSION : $\mathcal{B}' = \{f_1, f_2, f_3\} =$ base de $\mathbb{R}^3$.

② $\begin{cases} u(f_1) = f_1 \equiv 1\cdot f_1 + 0\cdot f_2 + 0\cdot f_3 \\ u(f_2) = 0 \equiv 0\cdot f_1 + 0\cdot f_2 + 0\cdot f_3 \\ u(f_3) = 2f_3 \equiv 0\cdot f_1 + 0\cdot f_2 + 2\cdot f_3 \end{cases} \Rightarrow A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

③ ⓐ Il s'agit de trouver pour chaque $i = 1,2,3$ les triplets de coefficients $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i \in \mathbb{R}$ t.q. l'on ait

$e_i = \alpha_i f_1 + \beta_i f_2 + \gamma_i f_3$.

Or, ce qu'on connaît, c'est l'inverse de cette situation.

$(*)\begin{cases} f_1 = e_1 - e_3 \\ f_2 = e_1 - e_2 \\ f_3 = -e_1 + e_2 + e_3 \end{cases}$

Il s'agit donc de résoudre ce système en inconnues e_1, e_2, e_3. En faisant le pivot de Gauss dessus, on a :

$\begin{cases} f_1 = e_1 - e_3 \\ -f_1 + f_2 = -e_2 + e_3 \\ f_1 + f_3 = e_2 \end{cases} \iff (**)\begin{cases} e_1 = f_1 + f_2 + f_3 \\ e_2 = f_1 + f_3 \\ e_3 = f_2 + f_3 \end{cases}$

ⓑ Par linéarité de u et ⓐ :

$\begin{cases} u(e_1) = u(f_1+f_2+f_3) = u(f_1) + u(f_2) + u(f_3) = f_1 + 2f_3 \\ u(e_2) = u(f_1+f_3) = u(f_1) + u(f_3) = f_1 + 2f_3 \\ u(e_3) = u(f_2+f_3) = u(f_2) + u(f_3) = 2f_3 \end{cases}$

ensuite,

$\begin{cases} u(e_1) = (e_1 - e_3) + 2(-e_1+e_2+e_3) = -e_1 + 2e_2 + e_3 \equiv \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \\ u(e_2) = (e_1 - e_3) + 2(-e_1+e_2+e_3) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \\ u(e_3) = 2(-e_1+e_2+e_3) = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \end{cases}$

ⓒ du système précédent :

$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, u \equiv A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

④ Dans $\mathbb{R}^3$ on a 2 bases : $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ et $\mathcal{B}' = \{f_1 f_2 f_3\}$. Alors, l'identité (triviale) $u = \mathrm{Id} \circ u \circ \mathrm{Id}$ (où Id est l'application identique entre $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^3$) s'écrit au niveau des matrices attachées à u dans $\mathcal{B}$ resp. $\mathcal{B}'$ suivant le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}') & \xrightarrow{A'} & (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}') \\ {\scriptstyle \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(\mathrm{Id}) = P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}} \uparrow & & \downarrow {\scriptstyle \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}(\mathrm{Id}) = P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}} \\ (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}) & \xrightarrow[A]{} & (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}) \end{array}$$

$$\boxed{A = P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} \cdot A' \cdot P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}} \quad \binom{*}{**}$$

où $P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ = matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ (≡ matrice de l'application identique entre $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}$) est fournie par le système $(*)$. Elle vaut $P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et elle est inversible car le syst. $(*)$ est syst. de Cramer (on peut vérifier que $\det P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} \neq 0$).

Aussi, la résolution du système de Cramer $(*)$ est le système $(**)$ qui fournit l'inverse de $P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$, à savoir :

$P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Ensuite, on n'a plus qu'à vérifier la relation $\binom{*}{**}$.

(passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$).

⑤ $\mathrm{Ker}\, u = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid u(\vec{x}) = \vec{0}\} = \{\vec{x} = \alpha \vec{f_1} + \beta \vec{f_2} + \gamma \vec{f_3} \mid u(\vec{x}) = 0\}$

$= \{\vec{x} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'} \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha \cdot \underbrace{u(\vec{f_1})}_{=\vec{f_1}} + \beta \cdot \underbrace{u(\vec{f_2})}_{=\vec{0}} + \gamma \cdot \underbrace{u(\vec{f_3})}_{2f_3} = \vec{0}\} =$

$\overset{\mathcal{B}' \text{ libre}}{=} \{\vec{x} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'} \mid \alpha = \gamma = 0, \ \forall \beta\} = \{\beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}\}_{\beta \in \mathbb{R}} = \mathrm{Vect}\{f_2\}$

⑥ $\mathrm{rang}\, u = \mathrm{rang}\, A' = \mathrm{rang}\, A = 2 \Rightarrow \dim \mathrm{Im}\, u = 2$. Or
$\mathrm{Im}\, u = \mathrm{Vect}\{u(f_1), u(f_2), u(f_3)\} = \mathrm{Vect}\{u(f_1), u(f_3)\} = \mathrm{Vect}\{f_1, f_3\}$.
On a : $\mathrm{Vect}\{f_1\} \cap \mathrm{Vect}\{f_2, f_3\} = \{0\}$ car $\mathcal{B}' = \{f_1, f_2, f_3\}$ = base.
Donc $\dim \mathrm{Ker}\, u + \dim \mathrm{Im}\, u = 1 + 2 = 3 = \dim \mathbb{R}^3 \Rightarrow \mathrm{Ker}\, u \oplus \mathrm{Im}\, u = \mathbb{R}^3$.