Université de Cergy-Pontoise - L1-M2

Examen - Session 2 - Mardi 16 juin 2009

Durée: 2h - Ni document ni calculatrice autorisés
Les 2 exercices sont indépendants

Exercice I (9 points)
On munit $\mathbb{R}^3$ de sa base canonique $\mathcal{B} = (\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3})$. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorphisme défini par:

$$\forall (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \quad f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 - x_3 \, , \, 2x_1 + x_3, \; 3x_1 - x_2)$$

1) Calculer $f(\mathbf{e_1})$, $f(\mathbf{e_2})$, $f(\mathbf{e_3})$. En déduire la matrice A de l'endomorphisme f dans la base $\mathcal{B}$.

2) On pose

$$\begin{aligned} \mathbf{u_1} &= \mathbf{e_1} + 3\mathbf{e_2} - 2\mathbf{e_3} \\ \mathbf{u_2} &= \mathbf{e_1} + \mathbf{e_3} \\ \mathbf{u_3} &= \mathbf{e_1} - \mathbf{e_2} \end{aligned}$$

Montrer que $(\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3})$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

3) Calculer $f(\mathbf{u_1})$. Déterminer le noyau de f, dont on donnera une base et la dimension.

4) Quel est le rang de f ? Montrer que

$$Im(f) = Vect(\mathbf{u_2}, \mathbf{u_3})$$

En déduire que

$$Im(f) \oplus Ker(f) = \mathbb{R}^3$$

Exercice II (7 pts) On note $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices carrées réelles de taille 2. On note $\mathcal{B} = (\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2})$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

1) Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Calculer A^2. Quel est le rang de A ?

2) Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est A.

a) Déterminer le noyau de f et l'image de f.

b) En déduire que $Im(f) = Ker(f)$.

3) On pose

$$\begin{aligned} \mathbf{e'_1} &= \mathbf{e_1} \\ \mathbf{e'_2} &= -3\mathbf{e_1} + \mathbf{e_2} \end{aligned}$$

Montrer que $\mathcal{B}' = (\mathbf{e'_1}, \mathbf{e'_2})$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et écrire la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, que l'on notera P.

4) Ecrire la matrice de l'endomorphisme f dans la base $\mathcal{B}'$, que l'on notera A'. Justifier l'égalité $PA' = AP$.

Exercice II (4 pts) Pour $(a, b, c) \in I\!R^3$, on considère le polynôme

$$P(X) = X^3 + aX^2 + bX + c$$

1) Montrer que X divise le polynome $P(X) + 2$ si et seulement si $c + 2 = 0$.

2) A quelles conditions sur $(a, b, c) \in I\!R^3$ le polynome $P(X) + 3$ admet-il 1 comme racine double ?

3) En déduire que X divise le polynome $P(X) + 2$ et 1 est racine double du polynome $P(X) + 3$ si et seulement si $a = b = -1$ et $c = -2$.