Université de Cergy-Pontoise
Mai 2009
M2 Licence MPI Première année

Première session - Durée 3 heures, documents interdits

Premier exercice - 3 points

Soit $\mathscr{A}$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par :

$$\mathscr{A} = \left\{ M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \right\}$$

1. Montrer que la somme de deux éléments de $\mathscr{A}$ est un élément de $\mathscr{A}$. Vérifier que $\mathscr{A}$ est un groupe pour l'addition. Quel est l'élément neutre pour l'addition ?
2. Montrer que le produit de deux éléments de $\mathscr{A}$ est un élément de $\mathscr{A}$ et vérifier que $\mathscr{A}$ contient la matrice $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
3. En conclure que $(\mathscr{A}, +, \times)$ est un anneau.

Second Exercice - 3 points

Pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, on considère le polynôme

$$P(X) = X^4 + 2X^3 + aX^2 + 4X + b$$

1. À quelle condition sur (a,b) le nombre -1 est-il racine du polynôme $P(X)$?
2. Calculer $P'(-1)$. Montrer que -1 est racine double de $P(X)$ si et seulement si $a = 3$ et $b = 2$.
3. En déduire une factorisation de

$$X^4 + 2X^3 + 3X^2 + 4X + 2.$$

   et donner toutes ses racines complexes.

Problème 1 - 7 points

Soit E un espace vectoriel de dimension 4, de base $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$. On considère l'endomorphisme f de E dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est :

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer le noyau de f. On vérifiera qu'il est de dimension 2 et on en donnera une base (e'_1, e'_2).
2. Quel est le rang de f ?

3. Soient e'_3 le vecteur dont les coordonnées dans la base $\mathscr{B}$ sont $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ et e'_4 le vecteur dont les coordonnées dans la base $\mathscr{B}$ sont $\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}$. Déterminer $f(e'_3)$ et $f(e'_4)$.
4. Montrer que $\mathscr{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3, e'_4)$ est une base de E et écrire la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$.
5. Écrire la matrice de l'endomorphisme f dans la base $\mathscr{B}'$. On s'efforcera de faire le moins de calcul possible.

Problème 2 - 7 points

1. Soit A la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ donnée par :

$$A = \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

   Calculer A^2 et vérifier que $A^3 = I_3$.
2. On définit une matrice B par :

$$B = A^2 + A + I_3$$

   Calculer B.
3. On définit l'ensemble des matrices $\mathscr{C}$ par :

$$\mathscr{C} = \{C \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid CB = BC = 0\}$$

   (où 0 désigne la matrice nulle de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.) Montrer que $A - I_3$ est un élément de $\mathscr{C}$.
4. Montrer que $\mathscr{C}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
5. Montrer que $BC = 0$ si et seulement si la somme des éléments de chaque colonne de C est nulle. À quelle condition a t-on $CB = 0$?
6. Trouver tous les éléments de $\mathscr{C}$. Donner une base de $\mathscr{C}$.