Corrigé de l'examen du 16 juin 2009

M2 - SESSION 2 - 2008-2009

Exercice I

1) $f(e_1) = (1, 2, 3)$

$f(e_2) = (-1, 0, -1)$

$f(e_3) = (-1, 1, 0)$

$$\Rightarrow \boxed{A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}}$$

2) Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 / \ \alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 = 0$

$\Leftrightarrow \alpha(e_1 + 3e_2 - 2e_3) + \beta(e_1 + e_3) + \gamma(e_1 - e_2) = 0$

$\Leftrightarrow (\alpha + \beta + \gamma)e_1 + (3\alpha - \gamma)e_2 + (-2\alpha + \beta)e_3 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ 3\alpha - \gamma = 0 \\ -2\alpha + \beta = 0 \end{cases} \left(\text{car } (e_1, e_2, e_3) \text{ base de } \mathbb{R}^3\right) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 6\alpha = 0 \\ \gamma = 3\alpha \\ \beta = 2\alpha \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$. Donc (u_1, u_2, u_3) sont 3 vecteurs libres de $\mathbb{R}^3$, $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$, c'est donc une base de $\mathbb{R}^3$.

3) $f(u_1) = f(1, 3, -2) = (1 - 3 + 2, 2 - 2, 3 - 3) = (0, 0, 0)$

(ou : $f(u_1) = f(e_1) + 3f(e_2) - 2f(e_3) = (0, 0, 0)$)

Donc $u_1 \in \operatorname{Ker}(f)$.

De plus $\vec{x}=(x_1,x_2,x_3)\in \text{Ker} f \iff f(x_1,x_2,x_3)=(0,0,0)$

$$\iff \begin{cases} x_1-x_2-x_3=0 \\ 2x_1 \quad +x_3=0 \\ 3x_1-x_2 \quad =0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1(1-3+2)=x_1\times 0=0 \\ x_3=-2x_1 \\ x_2=3x_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_2=3x_1 \\ x_3=-2x_1 \\ x_1\in\mathbb{R} \end{cases} \iff \vec{x}=(x_1,3x_1,-2x_1)=x_1(1,3,-2)$$
$$\iff \vec{x}=x_1\vec{u_1} \text{ avec } x_1\in\mathbb{R}$$

D'où $\boxed{\text{Ker}(f)=\text{Vect}(u_1)}$

Base de $\text{Ker}(f)=\{u_1\}$, $\boxed{\dim(\text{Ker} f)=1}$

4) D'après le théorème du rang,

$$\dim(\text{Ker} f)+\text{rg}(f)=\dim(\mathbb{R}^3)=3$$

d'où $\text{rg}(f)=3-\dim(\text{Ker} f)=3-1=2$

$\Rightarrow \boxed{\text{rg}(f)=2}$

$$\text{Im} f=\text{Vect}(f(e_1),f(e_2),f(e_3))$$
$$=\text{Vect}(e_1+2e_2+3e_3,\ -e_1-e_3,\ -e_1+e_2)$$

~~Vect(~~ On, $-e_1-e_3=-u_2$

$-e_1+e_2=-u_3$

et on sait que $\dim(\mathrm{Im} f) = rg(f) = 2$

Comme (u_2, u_3) libre, on en déduit

$$\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}(u_2, u_3)$$

(On peut aussi remarquer que $f(e_1) = e_1 + 2e_2 + 3e_3 = 3u_2 - 2u_3$)

Comme (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$, on a

$$\mathbb{R}^3 = \mathrm{Vect}(u_1) \oplus \mathrm{Vect}(u_2, u_3)$$

soit $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$

Exercice II

1) $A^2 = \begin{pmatrix} +3 & -9 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} +3 & -9 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$rg(A) = 1$ car $f(e_2) = \begin{pmatrix} -9 \\ -3 \end{pmatrix} = -3 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = -3 f(e_1)$

2) a) $(x_1, x_2) \in \mathrm{Ker} f \iff f(x_1, x_2) = 0$

$$\iff \begin{cases} 3x_1 - 9x_2 = 0 \\ x_1 - 3x_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = 3x_2 \\ x_2 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$\iff (x_1, x_2) = x_2 (3, 1)$ avec $x_2 \in \mathbb{R}$

$\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Vect}\big((3,1)\big) = \mathrm{Vect}\,(3e_1 + e_2)$

$\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Vect}\big(f(e_1), f(e_2)\big) = \mathrm{Vect}\big(f(e_1), -3f(e_1)\big)$

$= \mathrm{Vect}\big(f(e_1)\big) = \mathrm{Vect}\,(3e_1 + e_2)$

b) On voit donc que $\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Im}\, f$

3) Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \,/\, \alpha e'_1 + \beta e'_2 = 0$

$\Leftrightarrow \alpha e_1 + \beta(3e_1 + e_2) = 0$

$\Leftrightarrow (\alpha + 3\beta) e_1 + \beta e_2 = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + 3\beta = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}$ car (e_1, e_2) base de $\mathbb{R}^2$

$\Leftrightarrow \alpha = \beta = 0$. Donc (e'_1, e'_2) est une famille libre de 2 vecteurs de $\mathbb{R}^2$, c'est donc une base de $\mathbb{R}^2$

$\rightarrow P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

4) On a $f(e'_1) = f(e_1) = 3e_1 + e_2 = e'_2$

et $f(e'_2) = f(3e_1 + e_2) = 0$

donc la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$ est

$$\boxed{A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

D'après la formule de changement de base pour la matrice de l'endomorphisme f,

on a : $A' = P^{-1}AP$

d'où $PA' = P(P^{-1}AP) = (PP^{-1})AP = AP$

soit $\boxed{PA' = AP}$

(qui peut aussi se vérifier par le calcul)

Exercice III

1) X divise $P(X) + 2 \iff 0$ racine de $P(X) + 2$

$\iff P(0) + 2 = 0 \iff c + 2 = 0$

2) 1 est racine double de $P(X)+3 \iff$

$$\begin{cases} P(X)+3 \big|_{x=1} = 0 \\ (P(X)+3)' \big|_{X=1} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} P(1)+3 = 0 \\ P'(1) = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 1+a+b+c+3 = 0 \\ 3+2a+b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a+b+c = -4 \\ 2a+b = -3 \end{cases}$$

3) On déduit de 1) et 2) que les 2 conditions sont réunies si et seulement si

$$\begin{cases} c = -2 \\ a+b+c = -4 \\ 2a+b = -3 \end{cases} \iff \begin{cases} c = -2 \\ a+b = -2 \\ 2a+b = -3 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} c = -2 \\ b = -1 \\ a = -1 \end{cases} \iff a = b = -1 \text{ et } c = 2$$