2008 – 2009 (1)

EXAMEN M2 – SESSION 1 (mai 2009)

M2 Licence MPI – Première Année

Premier exercice

1. Soit $M_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ et $M_2 = \begin{pmatrix} a' & b' \\ b' & a' \end{pmatrix}$ deux éléments de $\mathcal{A}$

alors $M_1 + M_2 = \begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ b+b' & a+a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}$ où $A = a+a'$, $B = b+b'$

ainsi, on voit que $M_1 + M_2 \in \mathcal{A}$.

L'addition est donc une loi de composition interne dans $\mathcal{A}$. Elle est associative, commutative, comme elle l'est dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
De plus $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{A}$ (on prend $a = 0 = b$), c'est l'élément neutre pour +
et si
$M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ alors $\begin{pmatrix} -a & -b \\ -b & -a \end{pmatrix} \in \mathcal{A}$ et est l'opposé de M
$\mathcal{A}$ est donc un <u>groupe</u> pour +

2. En prenant $a = 1$ et $b = 0$, on voit que $I_2 \in \mathcal{A}$.
Par ailleurs :
$$M_1 M_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & b' \\ b' & a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa'+bb' & ab'+a'b \\ ab'+a'b & aa'+bb' \end{pmatrix}$$

et donc, en posant $A = aa' + bb'$ et $B = ab' + a'b$, on voit que $M_1 M_2 \in \mathcal{A}$.
La multiplication des matrices est donc une l.c.i (loi de composition interne) dans $\mathcal{A}$. Comme elle est associative et distributive sur +, comme I_2 en est élément neutre, $\mathcal{A}$ est un <u>anneau</u> pour + et ×

<u>Rem 1</u>. Si on pose $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, on peut remarquer que $\mathcal{A} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(I_2, J)$ et utiliser cela pour répondre aux questions

<u>Rem 2</u>. On peut remarquer que $\mathcal{A}$ est un <u>anneau commutatif</u> contrairement à $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Second exercice

$$P(X) = X^4 + 2X^3 + aX^2 + 4X + b$$

1.) $P(-1) = 1 - 2 + a - 4 + b = a + b - 5$

donc -1 est racine de P si et seulement si $\underline{a+b=5}$

2) $P'(X) = 4X^3 + 6X^2 + 2aX + 4$

donc $P'(-1) = -4 + 6 - 2a + 4 = -2a + 6$

donc -1 est racine de P' si $\underline{a = 3}$

On sait par théorème que -1 est racine double (au moins) si -1 est racine de $P(X)$ et de $P'(X)$, donc ssi

$$\begin{cases} a = 3 \\ a + b = 5 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \end{cases}$$

3) Par ce qui précède -1 doit être racine double de ~~P~~ polyn en conséquence, on peut le factoriser par $(X+1)^2 = X^2 + 2X + 1$

Effectivement, on trouve :

$$X^4 + 2X^3 + 3X^2 + 4X + 2 = X^4 + 2X^3 + X^2 + 2(X^2 + 2X + 1)$$

$$= (X^2 + 2X + 1)(X^2 + 2)$$ (on peut aussi effectuer la division ou procéder par identification)

Les racines complexes sont -1 (racine double) et $i\sqrt{2}$, $-i\sqrt{2}$, racines simples.

Problème 1

1. $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ désignant la matrice des coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$, on a : $x \in \ker f \iff \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\iff \begin{cases} x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Si on considère que x_3 et x_4 sont choisis de façon quelconque dans $\mathbb{R}$, les solutions s'écrivent :

$$\begin{cases} x_1 = -x_4 \\ x_2 = \quad -x_3 \\ x_3 = \quad x_3 \\ x_4 = x_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_4 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$(x_4, x_3) \in \mathbb{R}^2$

Sous cette forme, on voit que $\ker f = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$

Les vecteurs $e'_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $e'_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sont indépendants, et constituent une base de $\ker f$.

2. Par théorème du rang appliqué à f :

$$\dim E = \dim \ker f + \mathrm{rg} f \Leftrightarrow 4 = 2 + \mathrm{rg} f$$

et donc $\boxed{\mathrm{rg} f = 2}$

3. $$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

On a donc $f(e'_3) = 2e'_3$ et $f(e'_4) = -2e'_4$

4. On peut mq ces 4 vecteurs sont indépendants et forment donc une base de E qui est de dimension 4, en écrivant la matrice de leurs coordonnées :

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et en calculant son rang ou son déterminant

$$\text{or } \det P = - \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= -(-4) + (-4) = 8$$

(il est plus efficace de "pivoter")

5. On peut utiliser la formule de changement de base après avoir calculé $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & -1/4 & -1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$

Mais il est plus efficace de remarquer

$$f(e'_1) = f(e'_2) = 0 \quad , f(e'_3) = 2e'_3 \quad , f(e'_4) = -2e'_4$$

et donc $\mathcal{M}_{B'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

Problème 2

1. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

2. $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

3. $(A-I)B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

et $\quad B(A-I) = 0$

4. si C et C' sont dans $\mathcal{C}$, $(C+\lambda C')B = CB + \lambda C'B$
$= 0 + \lambda \times 0 = 0$

de même $B(C+\lambda C') = BC + \lambda BC' = 0$

donc $C + \lambda C' \in \mathcal{C}$. De plus, 3 prouve que $\mathcal{C}$ est non vide.

5. Posons $C = \begin{pmatrix} c_1 & c'_1 & c''_1 \\ c_2 & c'_2 & c''_2 \\ c_3 & c'_3 & c''_3 \end{pmatrix}$ alors $BC = \begin{pmatrix} c_1+c_2+c_3 & c'_1+c'_2+c'_3 & c''_1+c''_2+c''_3 \\ c_1+c_2+c_3 & c'_1+c'_2+c'_3 & c''_1+c''_2+c''_3 \\ c_1+c_2+c_3 & c'_1+c'_2+c'_3 & c''_1+c''_2+c''_3 \end{pmatrix}$

donc $\quad BC = 0$ ssi $\begin{cases} c_1+c_2+c_3 = 0 \\ c'_1+c'_2+c'_3 = 0 \\ c''_1+c''_2+c''_3 = 0 \end{cases}$

de même $CB = 0$ ssi $\begin{cases} c_1 + c'_1 + c''_1 = 0 \\ c_2 + c'_2 + c''_2 = 0 \\ c_3 + c'_3 + c''_3 = 0 \end{cases}$

6. Les deux premières équation de chaque systèmes sont satisfaites si :

$$c_3 = -c_1 - c_2$$
$$c'_3 = -c'_1 - c'_2$$
$$c''_1 = -c_1 - c'_1$$
$$c''_2 = -c_2 - c'_2$$

et la matrice à la forme :

$$\begin{pmatrix} c_1 & c'_1 & -c_1 - c'_1 \\ c_2 & c'_2 & -c_2 - c'_2 \\ -c_1 - c_2 & -c'_1 - c'_2 & c''_3 \end{pmatrix}$$

Or les deux équations manquantes seront satisfaites lorsque $c''_3 = c_1 + c'_1 + c_2 + c'_2$

on a donc
$$\mathcal{C} = \left\{ M = \begin{pmatrix} c_1 & c'_1 & -c_1 - c'_1 \\ c_2 & c'_2 & -c_2 - c'_2 \\ -c_1 - c_2 & -c'_1 - c'_2 & c_1 + c'_1 + c_2 + c'_3 \end{pmatrix} / c_i \in \mathbb{R} \right\}$$

et $\mathcal{C} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \right)$