L1-M2 - 2007/2008 - **Session de rattrapage - 10 juin 2008**

Examen de Mathématiques (M2)

Durée: **2** heures

Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisées

Exercice 1 : Soit $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices 2×2 à coéfficients dans $\mathbb{R}$. Soit

$$\mathcal{A} = \left\{ A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & b \end{pmatrix}, \forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

1. Montrer que pour toute paire de matrices $(A, B) \in \mathcal{A}^2$ on a $AB \in \mathcal{A}$.
2. Trouver l'élément neutre pour la multiplication dans $\mathcal{A}$.
3. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur a, b, c pour que $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & b \end{pmatrix}$ soit inversible.
4. Montrer que la multiplication des matrices n'est pas commutative dans $\mathcal{A}$.

Exercice 2 : Soit $P(X) = X^4 + X^3 + aX^2 + bX + c$ un polynôme à coefficients réels. Supposons que $P(X)$ divisé, succesivement, par les polynômes $X + 1$, $X + 2$ et $X - 1$, donne les restes 1, 16 et -1, respectivement. Trouver alors les paramètres a, b, c.

Exercice 3 : Soit l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$.

1. Soit un système de vecteurs $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, v_3\}$ donnés par leurs coordonnées dans la base canonique $\mathcal{B}$ comme suit :

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

   (a) Montrer que $\mathcal{V}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

   (b) Trouver la matrice de passage de $\mathcal{V}$ à $\mathcal{B}$. Notons-la par $P_{\mathcal{V}\mathcal{B}}$.

   (c) Trouver la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{V}$, qu'on notera par $P_{\mathcal{B}\mathcal{V}}$.

2. Soit l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par :

$$f(v_1) = 2v_1 + 2v_2 - v_3, \quad f(v_2) = v_2, \quad f(v_3) = 2v_1 - v_3.$$

   (a) Donner la matrice de l'application f dans la base $\mathcal{V}$. Notons-la par $\mathbf{Mat}_{\mathcal{V}} f$.

   (b) Trouver le rang de f.

   (c) En déduire $\dim \mathrm{Ker} f$, la dimension du noyau de f.

   (d) Donner une base du sous-espace $\mathrm{Ker} f$.

   (e) Donner une base du sous-espace $\mathrm{Im} f$ (image de f).

3. Déduire des questions précédentes $\mathbf{Mat}_{\mathcal{B}} f$, la matrice de l'application f dans la base canonique $\mathcal{B}$.
