Examen de Mathématiques (M2)

Durée: **3** heures

Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisées

Exercice 1 : Soit $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices 2×2 à coefficients dans $\mathbb{R}$. Soit

$$\mathcal{A} = \left\{ A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix},\ \text{où } (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

1. Montrer, pour toute paire de matrices quelconques $(A,B) \in \mathcal{A}^2$, qu'on a $AB \in \mathcal{A}$.
2. Montrer qu'il n'y a pas de matrice $U \in \mathcal{A}$ telle que : $\forall A \in \mathcal{A}$, $UA = A$.
3. Montrer qu'il y a une infinité de matrices $V \in \mathcal{A}$ telles que : $\forall A \in \mathcal{A}$, $AV = A$.

Exercice 2 : Sur $]0,+\infty[$ on définit une opération "$*$" par :

$$\forall x > 0, \forall y > 0, \quad x * y = x^{\ln y} = \mathrm{e}^{\ln y \ln x}.$$

1. Montrer que :
   (a) L'opération "$*$" est une loi de composition *interne* sur $]0,+\infty[$.
   (b) L'opération "$*$" est commutative.
   (c) L'opération "$*$" est associative.
   (d) Montrer que e (base des logarithmes népériens) est un élément neutre par rapport à "$*$".
2. Soit l'ensemble $A =]0,+\infty[\setminus\{1\}$. Montrer que :
   (a) Tout $x \in A$ admet un inverse $\widetilde{x} \in A$ par rapport à la loi "$*$". Préciser l'expression de $\widetilde{x}$.
   (b) Le couple $(A, *)$ forme-t-il une structure algébrique ? Préciser laquelle.

Exercice 3 : On se propose de trouver par deux méthodes differentes (questions 1) et 2) ci-dessous) les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$, de degré $\deg P \leq 3$, qui vérifient l'hypothèse :

$$(\star) \qquad (X+1)P(X) - XP(X+2) = X^3 + X^2 + 1.$$

1. En posant d'abord $P(X) = a + bX + cX^2 + dX^3$, montrer qu'il n'y a qu'un seul polynôme qui vérifie $(\star)$. Le trouver explicitement.
2. (a) En utilisant $(\star)$ seulement, montrer que P vérifie $P(0) = 1$ et $P(1) = 1$.
   (b) En déduire que le polynôme $A = P - 1$ est divisible par $X(X-1)$.
   (c) Retrouver ainsi l'expression de P obtenue à la question (1).
3. Ecrire le théorème de division euclidienne pour la division de P par $D = X(X-1)$. En déduire le reste R de la division de P par D. (Indication : utiliser 2.a))

Exercice 4 : Soit $\mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à 2. Soit $\mathcal{B} = \{1, X, X^2\}$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. Soit $\Phi : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ définie par

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \quad \Phi(P) = P'.$$

1. (a) Montrer que Φ est une application linéaire.
   (b) Ecrire la matrice $\mathbf{Mat}_{\mathcal{B}}\Phi$ de Φ dans la base canonique $\mathcal{B}$. Notons-la par A.
   (c) Trouver le noyau de Φ et sa dimension.
   (d) En déduire le rang de Φ.
   (e) Trouver le sous-espace image de Φ (donner une base de celui-ci).
2. Soit, pour un $a \in \mathbb{R}$, le système de vecteurs $\mathcal{S} = \{1, X-a, (X-a)^2/2\}$.
   (a) Montrer que $\mathcal{S}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
   (b) Trouver $P_{\mathcal{BS}}$, la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{S}$.
   (c) Trouver la matrice $\mathbf{Mat}_{\mathcal{S}}\Phi$ de Φ dans la base $\mathcal{S}$. Notons-la par B.
   (d) Soit $P_{\mathcal{SB}}$ la matrice de passage de $\mathcal{S}$ à $\mathcal{B}$. Ecrire une identité qui relie les matrices A, B, $P_{\mathcal{BS}}$ et $P_{\mathcal{SB}}$.