CORRIGÉ de l'EXAMEN de MATHEMATIQUES L1 - M2 - Session 2 (10.06.2008)

EXERCICE 1 (1) $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & b \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} x & 0 \\ z & y \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow AB = \begin{pmatrix} ax & 0 \\ cx+bz & by \end{pmatrix} \in \mathcal{A}$.

(2) $\begin{pmatrix} ax & 0 \\ cx+bz & by \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & b \end{pmatrix} \Rightarrow a = b = 1,\ c = 0 \Rightarrow I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{A}$

(3) $\det A \neq 0 \Leftrightarrow ab \neq 0$.

(4) Si on avait commutativité de la multiplication ds. $\mathcal{A}$, on aurait eu $\begin{pmatrix} ax & 0 \\ cx+bz & by \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xa & 0 \\ za+yc & yb \end{pmatrix}$ Or, en $\mathbb{R}$ ayant commutativité il suffit de donner un contre exemple à $cx+bz = za+yc$. Par exemple, $x=0$, $z=0$, $y=1$ et $c=1$ conduit à $0=1$. Faux

EXERCICE 2 : (1) Théorème de division de P par D :

$\exists!\, Q, R \in \mathbb{R}[X]$ t.q. $P = DQ+R$ et $d^\circ R \lneq d^\circ D$.

Ici on choisira $D = X+1$, $D = X+2$ et $D = X-1$ respectivement.

Comme $d^\circ D = 1 \Rightarrow d^\circ R = 0$ et en posant $x=-1, x=-2, x=1$ on obtient le système :

$$\begin{cases} a - b + c = 0 \\ \cancel{16-8} + 4a - 2b + c = \cancel{8} \\ \cancel{1} + a+b+c = \cancel{1} \end{cases}$$

donc c'est un système homogène (sans second membre)

On a :

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 6 \neq 0$$

donc c'est un système de Cramer homogène $\Rightarrow$ la seule Solution est $a = b = c = 0$.

(2) Donc $P(X) = X^3(X+1)$ et 0 est racine triple.

EXERCICE 3 : (1.a) $\operatorname{card} \mathcal{V} = 3 = \dim \mathbb{R}^3$ donc il suffit de m.q. $\mathcal{V}$ est libre. Ceci équivaut à $\det(v_1, v_2, v_3) \neq 0$.

Mais $\det(v_1, v_2, v_3) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$.

(1.b) $P_{\mathcal{B}\mathcal{V}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \operatorname{Mat}_{\mathcal{V}\mathcal{B}} \operatorname{Id}$, cette dernière étant issue du système :

$$\begin{cases} \operatorname{Id}(v_1) \equiv v_1 = e_1 + 2e_2 + 3e_3 \\ \operatorname{Id}(v_2) \equiv v_2 = \quad\ e_2 + 2e_3 \quad (*) \\ \operatorname{Id}(v_3) \equiv v_3 = -e_1 \quad + 2e_3 \end{cases}$$

(1.c) $P_{\mathcal{V}\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}\mathcal{V}}^{-1}$ et elle peut être trouvée en résolvant le système $(*)$ en inconnues e_1, e_2, e_3 :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & v_1 \\ 0 & 1 & 2 & v_2 \\ -1 & 0 & 2 & v_3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & v_1 \\ 0 & 1 & 2 & v_2 \\ 0 & 2 & 5 & v_1+v_3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & v_1 \\ 0 & 1 & 2 & v_2 \\ 0 & 0 & 1 & v_1 - 2v_2 + v_3 \end{array}\right),$$ d'où

$$\begin{cases} \operatorname{Id}(e_1) \equiv e_1 = 2v_1 - 4v_2 + v_3 \\ \operatorname{Id}(e_2) \equiv e_2 = -2v_1 + 5v_2 - 2v_3 \\ \operatorname{Id}(e_3) \equiv e_3 = v_1 - 2v_2 + v_3 \end{cases} \Rightarrow P_{\mathcal{V}\mathcal{B}} = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}\mathcal{V}} \operatorname{Id} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -4 & 5 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2a) $\underbrace{\operatorname{Mat}_{\mathcal{V}} f = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(2b) $\boxed{\operatorname{rg} f = \operatorname{rg} \operatorname{Mat}_{\mathcal{V}} f = 2}$ car ci-dessus il y a < mat. triang. 2 lignes non totalement nulles

(autrement : $\det \operatorname{Mat}_{\mathcal{V}} f = 0$ mais $\det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 2 \neq 0$)

(2.c) $\dim \mathbb{R}^3 = \dim \operatorname{Ker} f + \operatorname{rg} f$ (Thm. du rang). Donc $\underline{\dim \operatorname{Ker} f = 1}$.

(2.d) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker} f \Leftrightarrow \begin{cases} x+z=0 \\ 2x+y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \operatorname{Ker} f = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -2x \\ -x \end{pmatrix} \middle| x \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

(2.e) $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\{f(v_1), f(v_2), f(v_3)\}$ mais par (2b) on sait que seulement 2 d'entre eux forment un syst. libre. Par exemple, $\{f(v_2), f(v_3)\}$ est libre, donc base de $\operatorname{Im} f$. (en effet, le rang de ce syst. de vect = 2 = card. du système)

(3)
$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^3, \mathcal{V}) & \xrightarrow{\operatorname{Mat}_{\mathcal{V}} f} & (\mathbb{R}^3, \mathcal{V}) \\ \uparrow P_{\mathcal{V}\mathcal{B}} & & \downarrow P_{\mathcal{B}\mathcal{V}} \\ (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}) & \xrightarrow[\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} f]{} & (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}) \end{array}$$

$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} f = P_{\mathcal{B}\mathcal{V}} \cdot \operatorname{Mat}_{\mathcal{V}} f \cdot P_{\mathcal{V}\mathcal{B}}$

Donc, après calcul,

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} f = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 6 \\ 12 & 15 & 8 \\ 12 & 2 & 8 \end{pmatrix}.$$