CORRIGÉ de L'EXAMEN DE MATHEMATIQUES (M2) du 14 mai 2008

EXERCICE 1 : ① Posons $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$. Alors $AB = \begin{pmatrix} 0 & a\beta \\ 0 & b\beta \end{pmatrix} \in \mathcal{A}$.

② Soit $U = \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & y \end{pmatrix}$. Alors $UA = A \Leftrightarrow \begin{cases} xb = a \\ yb = a \end{cases}$ qui doit avoir la même solution $\forall a, b \in \mathbb{R}$, ce qui est impossible.

③ Soit $V = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$. Alors $AV = A \Leftrightarrow \begin{cases} a\beta = a \\ b\beta = b \end{cases}$ dont les solutions (α et β) sont toutes les paires du type $(\alpha, 1) \in \mathbb{R} \times \{1\}$. Il y a donc une infinité de matrices $V = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{A}$ t.q. $AV = A$.

EXERCICE 2 (1.a) $x * y > 0$.
(1.b) $x * y = e^{\ln y \ln x} = e^{\ln x \ln y} = y * x$.

(1.c) $(x*y)*z = \exp(\ln z \ln(x*y)) = \exp(\ln z \ln(e^{\ln y \ln x}))$
$= \exp(\ln z(\ln y \ln x)) = \exp((\ln z \ln y)\ln x) = \exp(\ln(y*z)\ln x)$
$= x * (y*z)$.

(1.d) Plutôt que de vérifier que e est l'él neutre, cherchons-le en le notant ε. Alors, on doit avoir $x * \varepsilon = x$ (car la commutativité permet de négliger $x = \varepsilon * x$). Ceci équivaut à : $\forall x$: $\exp(\ln\varepsilon \ln x) = \exp(\ln x) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \left(\frac{e^{\ln\varepsilon}}{e}\right)^{\ln x} = 1 \ \forall x \Leftrightarrow \varepsilon = e$.

(2.a) $\tilde{x}$ inverse de $x \Leftrightarrow x * \tilde{x} = e$ (cf. 1 et 3) $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \exp(\ln\tilde{x} \ln x) = e \Leftrightarrow \ln\tilde{x}\ln x = 1 \underset{x \in A}{\Leftrightarrow} \boxed{\tilde{x} = e^{1/\ln x}}$

(2.b) $(A, *)$ est groupe commutatif.

EXERCICE 3 : ① On remplace $P = a + bX + cX^2 + dX^3$ dans (*) et, après calcul, on obtient l'identité équivalente :
$(a-1) - (b+4c+8d)X - (3c+12d+1)X^2 - (5d+1)X^3 = 0$
et, comme $\{1, X, X^2, X^3\}$ est système libre, ceci fournit un système

(de Cramer) de solution $a = 1$; $b = -4/15$; $c = 7/15$; $d = -1/5$.
Donc $\boxed{P = 1 - \frac{4}{15}X + \frac{7}{15}X^2 - \frac{1}{5}X^3}$.

(2.a) Dans (*) on pose $X = 0$, d'où $P(0) = 1$ et si on pose $X = -1$ on trouve $P(1) = 1$.

(2.b) $(P-1)(X)$ a, par (2.a), deux racines : 0 et 1, donc il est divisible par $X(X-1)$.

(2.c) cf. (2.b) : $A = P - 1$ s'écrit (sachant que lui aussi est de degré max. 3) comme $X(X-1)(\alpha X + \beta)$ donc $P(X) = 1 + X(X-1)(\alpha X + \beta)$ avec α, β inconnues qu'on trouve en remplaçant $P(X)$ dans (*). On obtient ainsi $(*) \Leftrightarrow X(-5\alpha - 1) - (4\alpha + 3\beta) = 0$
$\Leftrightarrow \alpha = -1/5$ et $\beta = 4/15$ et on retrouve P calculé à (1).

③ $P = X(X-1)Q + R$, $d^\circ R \leq d^\circ D - 1 = 1$.
Donc $R = aX + b$ et en donnant à X les valeurs 0 et 1, avec (2.a) on obtient le système :
$\begin{cases} R(0) = 1 \Leftrightarrow b = 1 \\ R(1) = 1 \Leftrightarrow a + b = 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{R = 1}$

EXERCICE 4 : (1.a) $\phi(\lambda P + Q) = (\lambda P + Q)' = \lambda P' + Q' = \lambda\phi(P) + \phi(Q)$

(1.b) $\begin{cases} \phi(1) = 0 \equiv 0 \cdot 1 + 0 \cdot X + 0 \cdot X^2 \\ \phi(X) = 1 \equiv 1 \cdot 1 + 0 \cdot X + 0 \cdot X^2 \\ \phi(X^2) = 2X \equiv 0 \cdot 1 + 2 \cdot X + 0 \cdot X^2 \end{cases} \Rightarrow \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\phi \equiv A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(1.c) $\mathrm{Ker}\,\phi = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid \phi(P) = 0\} = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P' = 0\}$
$= \mathbb{R}_0[X]$ l'e.v. des polynômes cts ou nuls.
$\dim \mathrm{Ker}\,\phi = 1$.

(1.d) Thm du rang : $\dim \mathbb{R}_2[X] = \dim \mathrm{Ker}\,\phi + \mathrm{Rang}\,\phi \Rightarrow \boxed{\mathrm{Rang}\,\phi = 2}$

Alternativement : $\text{rang}\, \phi = \text{rang} A$, or A est déjà une matrice triangulaire qui a 2 lignes non complètement nulles $\Rightarrow$ $\text{rang} A = 2$.

(1.e) On sait que $\text{Im}\, \phi = \text{Vect}\{\phi(1), \phi(X), \phi(X^2)\}$ et que $\dim \text{Im}\, \phi = 2$ (cf. (1.d)) donc il faut juste choisir 2 vecteurs lin. indépendants. Or $\phi(1) = 0$, donc $\{\phi(X), \phi(X^2)\} \equiv \{1, 2X\}$ est une base de $\text{Im}\, \phi$.

(2.a) $\dim \mathbb{R}_2[X] = 3 = \text{card}\, \mathcal{S}$. Il suffit de montrer seulement que $\mathcal{S}$ est système libre, ce qui équivaut au fait que $\text{rang}\, \mathcal{S} = 3$. D'une façon équivalente,

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -a & a^2/2 \\ 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \text{ doit être } \neq 0. \text{ VRAI, car } = 1/2.$$

(2.b) $P_{\mathcal{B}\mathcal{S}} = \text{Mat}_{\mathcal{S}\mathcal{B}}\, \text{Id}$, qui résulte du système :

$$\begin{cases} \text{Id}(1) = 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot X + 0 \cdot X^2 \\ \text{Id}(X-a) = (X-a) = (-a) \cdot 1 + 1 \cdot X + 0 \cdot X^2 \\ \text{Id}((X-a)^2/2) = (X-a)^2/2 = \frac{a^2}{2} \cdot 1 + (-a) \cdot X + \frac{1}{2} \cdot X^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow P_{\mathcal{B}\mathcal{S}} = \begin{pmatrix} 1 & -a & a^2/2 \\ 0 & +1 & -a \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

(2.c) $B \equiv \text{Mat}_{\mathcal{S}}\, \phi$ résulte de :

$$\begin{cases} \phi(1) = 1' = 0 \cdot 1 + 0 \cdot (X-a) + 0 \cdot (X-a)^2/2 \\ \phi(X-a) = (X-a)' = 1 \cdot 1 + 0 \cdot (X-a) + 0 \cdot (X-a)^2/2 \\ \phi((X-a)^2/2) = ((X-a)^2/2)' = 0 \cdot 1 + 1 \cdot (X-a) + 0 \cdot (X-a)^2/2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(2.d) On a le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{R}_2[X], \mathcal{B}) \arrow[r, "\text{Mat}_{\mathcal{B}} \phi \equiv A"] & (\mathbb{R}_2[X], \mathcal{B}) \arrow[d, "\text{Mat}_{\mathcal{B}\mathcal{S}}\, \text{Id} = P_{\mathcal{S}\mathcal{B}}"] \\
(\mathbb{R}_2[X], \mathcal{S}) \arrow[u, "P_{\mathcal{B}\mathcal{S}} = \text{Mat}_{\mathcal{S}\mathcal{B}}\, \text{Id}"] \arrow[r, "\text{Mat}_{\mathcal{S}} \phi \equiv B"'] & (\mathbb{R}_2[X], \mathcal{S})
\end{tikzcd}$$

donc : $B = P_{\mathcal{S}\mathcal{B}} \cdot A \cdot P_{\mathcal{B}\mathcal{S}}$

Note : Bien sûr, l'exercice 4 peut être résolu de façons différentes, donc les correcteurs valideront toute démarche correcte qui ne coïncide pas avec la solution présentée ci-dessus.