Université de Cergy-Pontoise - L1-M2
Examen de Mathématiques - Session 2 - Mercredi 6 juin 2007

Durée: 2h - Ni document ni calculatrice autorisés
Les 2 exercices sont indépendants

Exercice I (13 points)
Pour chaque $\alpha \in \mathbb{R}$, on considère une application linéaire $\phi_\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ est:

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & \alpha & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le déterminant de la matrice A_α en fonction de α. Pour quelles valeurs de α la matrice A_α est-elle inversible ?
2. On suppose dans cette question que $\alpha = -1$. Déterminer, si elle existe, la matrice inverse de A_{-1}.
3. On suppose dans cette question que $\alpha = 0$.
   (a) Trouver une base de $\operatorname{Ker} \phi_0$.
   (b) En déduire la dimension de l'image de ϕ_0.
   (c) Montrer que $\operatorname{Im} \phi_0 = Vect\{e_1, e_1 + 2e_2 + 3e_3\}$.
   (d) Montrer que $\operatorname{Ker} \phi_0 \oplus \operatorname{Im} \phi_0 = \mathbb{R}^3$.
4. On suppose dans cette question que $\alpha = 2$. On pose: $\begin{cases} f_1 = e_1 \\ f_2 = -2e_1 + e_2 \\ f_3 = -3e_1 + 4e_2 + 2e_3. \end{cases}$
   (a) Montrer que $\mathcal{B}' = \{f_1, f_2, f_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$. En déduire que si on pose
   $$P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
   alors la matrice P est inversible. Quelle est la signification de P?
   (b) Calculer $A_2(f_1)$, $A_2(f_2)$ et $A_2(f_3)$ en fonction de f_1, f_2 et f_3 et en déduire la matrice de ϕ_2 dans la base $\mathcal{B}'$.
   (c) Justifier (sans calcul) l'identité:
   $$P^{-1}A_2P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice II (7 pts)
On considère le polynôme $B(X) = X^3 - 3X + 2$.

1. Montrer que 1 est racine double de $B(X)$.
2. En déduire la factorisation de $B(X)$ sur $\mathbb{R}[X]$.
3. On pose $A(X) = (X-1)^{2007}$. Soit $Q(X)$ le quotient et soit $R(X)$ le reste dans la division du polynôme $A(X)$ par le polynôme $B(X)$.
   (a) Donner l'expression de A en fonction de B, Q et R. Quel est le degré maximal de $R(X)$?
   (b) Montrer que $(X-1)^2$ divise $R(X)$. En déduire qu'il existe un nombre réel a tel que $R(X) = a(X-1)^2$.
   (c) Montrer que $(X-1)^{2005} = Q(X)(X+2) + a$ et en déduire que $a = -3^{2005}$.