L1-M2
Première année, 2006/2007
Examen du 11 mai 2007

Examen de Mathématiques (M2)

Durée: **3** heures
Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisées

Exercice 1 : On considère A l'ensemble des réels qui s'écrivent sous la forme $a + b\sqrt{2}$, avec a et b entiers. En d'autres termes, $A = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$.

1. Est-ce que $\sqrt{8} + \sqrt{4}$ appartient à A ? Montrer que $(A, +)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$.
2. Montrer que A est stable par multiplication (c-à-d, si u et v sont dans A alors le produit uv est encore dans A).
3. On cherche à caractériser les éléments de A qui possèdent un inverse dans A (pour la multiplication).
   (a) Est-ce que $\sqrt{2}$ possède un inverse dans A ?
   (b) Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Montrer que
   $$\frac{1}{a + b\sqrt{2}} \in A \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{a}{a^2 - 2b^2} \in \mathbb{Z} \text{ et } \frac{b}{a^2 - 2b^2} \in \mathbb{Z}$$
   (on pourrait multiplier par la quantité conjuguée).
   (c) En déduire les valeurs de a pour lesquelles $a + 5\sqrt{2}$ possède un inverse dans A.

Indication : on rappelle que pour $a, b \in \mathbb{Z}$ on a $a + b\sqrt{2} = 0$ si et seulement si $a = 0$ et $b = 0$.

Exercice 2 : Soit $\theta \in \mathbb{R}$ fixé. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ soit $P_n = (\cos\theta + X \sin\theta)^n$. Soit $Q = X^2 + 1$.

1. Trouver, pour les cas $n = 0, 1, 2$, le quotient et le reste de la division de P_n par Q (écrire le théorème de division euclidienne pour chaque cas).
2. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}$.
   (a) Quel est le degré maximal du reste R_n de la division de P_n par Q ?
   (b) Trouver l'expression exacte du polynôme reste R_n.
   (c) Cette expression couvre-t-elle aussi les cas $n = 0, 1, 2$?

Exercice 3 : Soit φ l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même définie par
$$\varphi \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - y + z \\ 2x - y + z \\ z \end{pmatrix},$$
où les vecteurs sont écrits dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Donner la matrice A de φ relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer le noyau de φ en donnant une base de $\text{Ker}\varphi$ mais aussi les équations cartésiennes qui définissent le sous-espace $\text{Ker}\varphi$.
3. En déduire la dimension de l'image de φ.
4. Déterminer une base de l'image de φ.

— tourner la page —

5. Soient

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ ; \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \ ; \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ .$$

   (a) Montrer que ces vecteurs forment une base de $\mathbb{R}^3$.

   (b) Calculer $\varphi(v_1)$, $\varphi(v_2)$ et $\varphi(v_3)$ et les exprimer en fonction de v_1, v_2, v_3.

   (c) En déduire la matrice A' de φ dans la base (v_1, v_2, v_3).

Exercice 4 : Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension $n \geq 2$, et soit f un endomorphisme de E (application linéaire de E dans E). Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note f^k le composé k fois de f par lui-même. On convient que f^0 est l'application identique (i.e. $f^0(x) = x$, $\forall x \in E$).

1. Montrer qu'on a $\mathrm{Ker}(f^k) \subseteq \mathrm{Ker}(f^{k+1})$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
2. Que vaut $\mathrm{Ker}(f^0)$? En déduire que si $\mathrm{Ker}(f^0) = \mathrm{Ker} f$ alors f^k est bijective pour tout $k \in \mathbb{N}$.
3. Montrer que si pour un entier k donné on a $\mathrm{Ker}(f^k) = \mathrm{Ker}(f^{k+1})$, alors cela entraîne $\mathrm{Ker}(f^{k+1}) = \mathrm{Ker}(f^{k+2})$.
4. On suppose maintenant que f vérifie : $f^{n-1} \neq 0$ et $f^n = 0$.

   (a) Que vaut $\mathrm{Ker}(f^n)$?

   (b) Déduire des questions précédentes que l'on a

   $$\{0\} \subset \mathrm{Ker} f \subset \mathrm{Ker}(f^2) \subset \cdots \subset \mathrm{Ker}(f^{n-1}) \subset E \ ,$$

   et que ces inclusions sont strictes.

Nota bene : Réponses concises + trêve au bla-bla = temps épargné + correcteur bienveillant