CORRIGÉ de l'Examen de M2 – Session 2 (6 juin 2007)

L1 – S2 – MPI – 2006-2007

EXERCICE 1 :

1) $\det A_\alpha = 3\alpha$ donc A_α inversible $\Leftrightarrow \alpha \neq 0$.

2) D'après (1), $\alpha = -1 \neq 0$ donc A_{-1} est inversible. On a : $A_{-1}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$.

3) a) $\operatorname{Ker} A_0 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid A_0 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x-2y+z \\ 2z \\ 3z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$

& b) $= \operatorname{Vect}\{e_1 + 2e_2\}$. $\Rightarrow \dim \operatorname{Ker} A_0 = 1 \Rightarrow$ Th du rang : $\operatorname{rang} A_0 = 3 - 1 = 2$

c) $\operatorname{Im} A_0 = \operatorname{Vect}\{A_0 e_1, A_0 e_2, A_0 e_3\} = \operatorname{Vect}(e_1, -2e_1, e_1 + 2e_2 + 3e_3) =$
$= \operatorname{Vect}\{e_1, e_1 + 2e_2 + 3e_3\} = \operatorname{Vect}\{e_1, 2e_2 + 3e_3\}$.

d) les vecteurs e_1, $e_1 + 2e_2$ et $e_1 + 2e_2 + 3e_3$ sont linéairement indép. car en les mettant comme colonnes ds. une matrice, celle-ci est triangulaire supérieur donc son rang $= 3$ ($\Leftrightarrow \det \neq 0$). Donc $\operatorname{Ker} A_0 \cap \operatorname{Im} A_0 = \{0\}$. Par ailleurs, $\dim \operatorname{Ker} A_0 + \dim \operatorname{Im} A_0 = 1 + 2 = 3 = \dim \mathbb{R}^3$, donc la somme est directe.

4) a)
$A_2(f_1) = A_2(e_1) = e_1 = f_1$
$A_2(f_2) = 2(-2e_1 + e_2) = 2f_2$
$A_2(f_3) = 3(-3e_1 + 4e_2 + 2e_3) = 3f_3$
$\Rightarrow [\phi_2]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

b) $\det P = 2 \neq 0 \Rightarrow P$ inversible.

Par calcul, l'identité est vérifiée (si jamais on veut calculer P^{-1} avant). Sinon, on peut dire que P est la mat. de passage entre les bases $\mathcal{B}_0$ et $\mathcal{B}$ (voir déf. des f_i, $i = 1, \dots, 3$) et $[\phi]_{\mathcal{B}}$ est la mat. de l'endo ϕ en $\mathcal{B}$, donc $P^{-1} A_2 P = [\phi]_{\mathcal{B}}$.

EXERCICE 2 :

1) $B(1) = 0$; $B'(X) = 3X^2 - 3 \Rightarrow B'(1) = 0$; $B''(X) = 6X \Rightarrow B''(1) = 6 \neq 0$
Donc 1 est racine de B de multiplicité exactement $= 2$.

2) La division euclidienne de $B(X)$ par $(X-1)^2$ donne le quotient $X+2$.
Donc $B(X) = (X-1)^2 (X+2)$.

3) a) $A(X) = B(X)Q(X) + R(X)$ et $d^\circ R \leq d^\circ B - 1 = 3 - 1 = 2$.

b) Si on dérive l'expression ci-dessus on a : $A'(X) = B'(X)Q(X) + B(X)Q'(X) + R'(X)$ et si on met $X = 1$ dans les deux, comme $A(1) = A'(1) = B(1) = B'(1) = 0$, on a : $R(1) = 0$ et $R'(1) = 0$ donc 1 est racine (au moins) double de $R(X)$. Mais $d^\circ R \leq 2$, donc si $(X-1)^2 \mid R(X) \Rightarrow \exists a \in \mathbb{R}^*$ t.q. $R(X) = a(X-1)^2$.

c) $A(X) = B(X)Q(X) + R(X)$ s'écrit, d'après (b) et (a) comme :
$(X-1)^{2007} = (X-1)^2(X+2)Q(X) + a(X-1)^2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (X-1)^{2005} = (X+2)Q(X) + a$

Si on pose $X = -2$ on a : $(-3)^{2005} = 0 + a \Rightarrow a = -3^{2005}$.