Corrigé de l'examen M2 du 11 mai 2007 | SESSION 1 2006 − 2007 | M2

EXO 1 : ① • $\sqrt{8}+\sqrt{4} = 2+2\sqrt{2}$ donc $\in A$ (avec $a=b=2$).

• $\forall x,y \in A$ on doit avoir $x+y \in A$ et $-x \in A$. En effet, $\forall a,b,c,d \in \mathbb{Z}$, $(a+b\sqrt{2})+(c+d\sqrt{2}) = (a+c)+(b+d)\sqrt{2} \in A$ et $(-a)+(-b)\sqrt{2} \in A$.

② $\forall a,b,c,d \in \mathbb{Z}$: $(a+b\sqrt{2})(c+d\sqrt{2}) = (ac+2bd)+(ad+bc)\sqrt{2} \in A$

③ ⓐ L'element neutre de la multiplication est $1 \equiv 1+0\sqrt{2}$. Si $\sqrt{2}$ avait un inverse $a+b\sqrt{2}$, alors on aurait $\sqrt{2}(a+b\sqrt{2}) = 1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (2b-1)+a\sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow b = 1/2 \notin \mathbb{Z}$ et $a=0$. Donc $\sqrt{2}$ ne possède pas d'inverse.

ⓑ $\dfrac{1}{a+b\sqrt{2}} = \dfrac{a}{a^2-2b^2} - \dfrac{b}{a^2-2b^2}\sqrt{2}$ donc "$\Leftarrow$" est évidente.

Reciproquement : $\dfrac{1}{a+b\sqrt{2}} \in A \Leftrightarrow \exists c,d \in \mathbb{Z}$ t.q. $\dfrac{1}{a+b\sqrt{2}} = c+d\sqrt{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} ac+2bd = 1 \\ bc+ad = 0 \end{cases}$ que je vois comme un système en inconnues c,d.

Son déterminant est $\Delta = \begin{vmatrix} a & 2b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2-2b^2 \neq 0$ ssi $(a,b) \neq (0,0)$.

Donc c'est un système de Cramer dont les solutions sont :

$d = \dfrac{\begin{vmatrix} a & 1 \\ b & 0 \end{vmatrix}}{a^2-2b^2} = -\dfrac{b}{a^2-2b^2}$ et $c = -\dfrac{\begin{vmatrix} 2b & 1 \\ a & 0 \end{vmatrix}}{a^2-2b^2} = \dfrac{a}{a^2-2b^2}$

Il résulte que $\frac{1}{a+b\sqrt{2}} \in A$ ssi d et c ci-dessus $\in \mathbb{Z}$. (Obs : on n'avait pas besoin de multiplier par le conjugué pour montrer "$\Leftarrow$".)

ⓒ D'après (b), $a+5\sqrt{2}$ admet un inverse ssi $\dfrac{a}{a^2-50}$ et $\dfrac{5}{a^2-50} \in \mathbb{Z}$

Mais $(a^2-50) | 5$ ssi $a^2-50 = \pm 1, \pm 5 \Leftrightarrow a^2 = 51$ ou $a^2 = 49$ ou $a^2 = 55$ ou $a^2 = 45$ et $a \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow a = \pm 7$

Dans ce cas, il est clair que $\dfrac{a}{a^2-50} = \dfrac{\pm 7}{-1} = \mp 7 \in \mathbb{Z}$ donc $a = \pm 7$ sont les valeurs recherchées.

EXO2 : 1) $n=0$: $P_n = 1 = 0\cdot(X^2+1)+1 \Rightarrow$ quot $=0$; reste $=1$

$n=1$: $P_n = \cos\theta + X\sin\theta = 0\cdot(X^2+1)+P_1 \Rightarrow$ quot $=0$; reste $=P_1$

$n=2$: $P_n = (\cos\theta + X\sin\theta)^2 = \cos^2\theta + 2X\cos\theta\sin\theta + X^2\sin^2\theta =$
$= \sin^2\theta(X^2+1) + (X\sin 2\theta + \cos 2\theta) \Rightarrow$ quot $= \sin^2\theta$, reste $= \cos 2\theta + X\sin 2\theta$

2) a) $P_n = A_n(X^2+1)+R_n$ et $d^\circ R_n \leq d^\circ(X^2+1)-1 = 1$. Donc le reste est du type $R_n = a_nX+b_n$.

b) Dans l'identité précédente on pose $X = \pm i$. On a :
$(\cos\theta \pm i\sin\theta)^n = 0 + a_n(\pm i)+b_n \Leftrightarrow$ (Formule de De Moivre)
$\Leftrightarrow \cos(n\theta) \pm i\sin(n\theta) = b_n \pm i a_n \Leftrightarrow a_n = \sin(n\theta)$ et $b_n = \cos(n\theta)$

c) donc $R_n = \sin(n\theta)X + \cos(n\theta)$ $\forall n \in \mathbb{N}$. (c'est coherent avec $n=0,1,2$ aussi)

EXO 3 : Soient e_1, e_2, e_3 les vect. de la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On a :

1) $\begin{cases} \varphi(e_1) = 2e_1 + 2e_2 \\ \varphi(e_2) = -e_1 - e_2 \\ \varphi(e_3) = e_1 + e_2 + e_3 \end{cases} \Rightarrow [\varphi]_{B_0} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (Obs : on aurait pu l'écrire directement de l'expression de φ en termes de coordonnées)

2) $\mathrm{Ker}\,\varphi = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \varphi\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} 2x = y \\ z = 0 \end{cases} \right\} = \{ (x, 2x, 0)^T \mid x \in \mathbb{R} \} =$

$= \{ x(1,2,0)^T \mid x \in \mathbb{R} \} = \mathrm{Vect}\{(1,2,0)^T\} = \mathrm{Vect}\{e_1 + 2e_2\} \Rightarrow \dim \mathrm{Ker}\,\varphi = 1.$

3) Théorème du rang : $3 = \dim \mathbb{R}^3 = \dim \mathrm{Ker}\,\varphi + \mathrm{rang}\,\varphi \Rightarrow \mathrm{rang}\,\varphi = 3 - 1 = 2.$

4) $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathrm{Im}\,\varphi \Leftrightarrow \exists \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ t.q. $\varphi\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. Ceci équivaut au fait que le système $\begin{cases} 2x - y + z = a \\ 2x - y + z = b \\ z = c \end{cases}$ soit compatible, ce qui est vrai ssi $a = b$. Donc

$\mathrm{Im}\,\varphi = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid a = b \right\} = \left\{ a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \forall a, c \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \mathrm{Vect}\{e_1 + e_2, e_3\}.$

5) On remarque que $\mathrm{Im}\,\varphi = \mathrm{Vect}\{v_1, v_3\}$ et $\mathrm{Ker}\,\varphi = \mathrm{Vect}\{v_2\}$.

a) $\det(v_1, v_2, v_3) = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow$ le rang du système de vecteurs $= 3 =$ nb. de vecteurs $\Rightarrow B' = \{v_1, v_2, v_3\}$ est une base de E

b) $\varphi(v_1) = v_1$; $\varphi(v_2) = 0$; $\varphi(v_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = v_1 + v_3$.

c) Elle se déduit du système ci-dessus (au (b)) : $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

EXO 4 : 1. $x \in \mathrm{Ker} f^k \Leftrightarrow f^k(x) = 0 \Rightarrow f(0) = f^{k+1}(x)$. Mais $f(0) = 0$ car f linéaire. Donc $x \in \mathrm{Ker} f^{k+1}$

2. $\mathrm{Ker} f^0 = \{0\}$. Si $\mathrm{Ker} f^0 = \mathrm{Ker} f$ alors $\mathrm{Ker} f = \{0\} \Leftrightarrow f$ injective $\underset{(f = \text{endo})}{\Leftrightarrow}$ f bijective $\Rightarrow f^k$ bijective

3. $\mathrm{Ker} f^k = \mathrm{Ker} f^{k+1} \Leftrightarrow \left(f^k(x) = 0 \Leftrightarrow f^{k+1}(x) = 0 \right) \Leftrightarrow \left(f^k(x) = 0 \Leftrightarrow f^k(f(x)) = 0 \right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(x \in \mathrm{Ker} f^k \Leftrightarrow f(x) \in \mathrm{Ker} f^k \right) \underset{\text{je vois } f(x) \text{ comme un } x'}{\Longrightarrow} \left(\underbrace{f(x)}_{x'} \in \mathrm{Ker} f^k \Leftrightarrow f(\underbrace{f(x)}_{x'}) \in \mathrm{Ker} f^k \right)$

$\Leftrightarrow \left(f^{k+1}(x) = 0 \Leftrightarrow f^{k+2}(x) = 0 \right) \Leftrightarrow \left(\mathrm{Ker} f^{k+1} = \mathrm{Ker} f^{k+2} \right).$

(Obs : on est allés partout avec des $\Leftrightarrow$ sauf une seule fois, quand on a eu $\Rightarrow$. Donc "le tout" c'est juste une "$\Rightarrow$".)

4. a) $f^n = 0 \Leftrightarrow f^n(x) = 0 \; \forall x \in E \Leftrightarrow E = \mathrm{Ker} f^n$.

b) Obs : f^k sont des endomorphismes de E $\forall k \in \mathbb{N}$ donc $\mathrm{Ker} f^k \subseteq E \; \forall k \in \mathbb{N}$.

- Par (1), (2) & (4.a) : $\{0\} = \mathrm{Ker} f^0 \subseteq \mathrm{Ker} f \subseteq \mathrm{Ker} f^2 \subseteq \ldots \subseteq \mathrm{Ker} f^k \subseteq \mathrm{Ker} f^{k+1} \subseteq \ldots \subseteq E$ (*) et cette inclusion (infinie) est valable toujours (i.e. sans l'hyp. $f^{n-1} \neq 0$ et $f^n = 0$).
- Si on ajoute l'hypothèse $f^n = 0$, par $f^{n+k}(x) = f^k(f^n(x)) = f^k(0) = 0$ et 4.a) on déduit que $\mathrm{Ker} f^n = \mathrm{Ker} f^{n+1} = \ldots = \mathrm{Ker} f^{n+k} = \ldots = E$.
- Il reste à montrer que dans la suite d'inclusions (*), sous l'hypothèse $f^{n-1} \neq 0$, il n'y a pas de paire de "Ker" égaux à gauche de $\mathrm{Ker} f^n$. En effet, si on suppose par l'absurde qu'il $\exists k_0 \leq n-1$ t.q. $\mathrm{Ker} f^{k_0} = \mathrm{Ker} f^{k_0+1}$ alors avec (3) on déduit $\mathrm{Ker} f^{k_0} = \ldots = \mathrm{Ker} f^n = E$. En particulier, $\mathrm{Ker} f^{n-1} = E \Leftrightarrow f^{n-1}(x) = 0 \; \forall x \in E$ i.e. $f^{n-1} = 0$. Contradiction. Donc ds. (*), à gauche de $\mathrm{Ker} f^n$ on n'a que des inclusions strictes. Comme $\dim E = n$ ceci m.q. la dim de chaque Ker monte d'une unité.