L1-M2
Première année, 2005/2006
**Examen du 13 juin 2006**

# Examen de Mathématiques (M2)

## Session de rattrapage

Durée: **2** heures
Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés
Le barème est donné à titre indicatif

---

**Exercice 1 :** Soit $\mathcal{M} \subseteq \mathbf{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices $3 \times 2$ de la forme $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a+b \\ b & c \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $\mathcal{M}$ est un groupe commutatif pour l'addition des matrices.
2. Montrer que $\mathcal{M}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{M}_{3,2}(\mathbb{R})$.
3. Soient les matrices $A_1, A_2, A_3$ données par

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

   Montrer que :
   (a) $A_1, A_2, A_3 \in \mathcal{M}$.
   (b) Les matrices $A_1, A_2, A_3$ forment un système libre.
   (c) $\mathcal{M}$ est engendré par ces trois matrices.
4. Quelle est la dimension du supplementaire de $\mathcal{M}$ dans $\mathbf{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ ?

**Exercice 2 :** Soit $P$ un polynôme à coefficients réels tel que $P(0) = P(1) = 1$.

1. Montrer qu'il existe un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$P(X) = X(X-1) \cdot Q(X) + 1. \qquad (\star)$$

2. Montrer que $d^\circ Q$, le degré du polynôme $Q$, vaut $d^\circ P - 2$, où $d^\circ P$ est le degré de $P$.
3.* Supposons que les coefficients de $P$ sont des nombres entiers. Montrer que le polynôme $Q$ de $(\star)$ a nécessairement des coefficients entiers (autrement dit, on a $Q \in \mathbb{Z}[X]$).

(*Indication :* Pour (1) : division euclidienne ; pour (3) : écrire l'expression a priori de $P$ et de $Q$, ensuite utiliser $(\star)$ et le fait que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\{1, X, \ldots, X^n\}$ est un système libre de vecteurs de $\mathbb{R}[X]$)

— **tournez la page** —

**Exercice 3 :** On se propose de trouver les termes généraux des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifient le système de récurrences suivant :

$$\text{(S)} \quad \begin{cases} u_{n+1} = 2u_n + 4v_n \\ v_{n+1} = u_n + 2v_n \end{cases} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N},$$

et pour lesquelles on a $u_0 = 1$ et $v_0 = 2$.

1. En posant $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ trouver la matrice $A \in \mathbf{M}_2(\mathbb{R})$ telle que le système (S) soit équivalent à l'équation $X_{n+1} = AX_n$.
2. En déduire que $X_n = A^n X_0$ (d'où la nécessité de calculer $A^n$).
3. Diagonaliser $A$ :
   (a) Calculer son polynôme caractéristique.
   (b) Trouver les valeurs propres de $A$ et justifier pourquoi elle est diagonalisable.
   (c) Trouver les sous-espaces propres de $A$.
   (d) Notons par $\mathcal{B}'$ la base formée par les vecteurs propres de $A$. Trouver la matrice de passage $P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ de la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$ à $\mathcal{B}'$. Notons-la $P$.
   (e) Trouver la matrice de passage $P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$ de la base $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$.
   (f) Montrer qu'il existe $D$, matrice diagonale qui vérifie $D = P^{-1}AP$.
   (g) Montrer que $A^n = PD^nP^{-1}$.
   (h) Calculer $D^n$ et en déduire $A^n$.
4. En déduire $X_n$ à partir des questions 2 et 3.h. Conclure.

---

Barème indicatif : Total = 22 points.
Les questions marquées par un astérisque sont un petit peu plus difficiles.
Nota bene : Réponses concises + trêve au bla-bla = temps épargné + correcteur bienveillant