L1-MS2
Première année, 2005/2006
Examen du 19 mai 2006

Examen de Mathématiques (M2)

Durée: **3** heures
Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisées
Le barème (total) est donné à titre indicatif

Exercice 1 : Soit la loi de composition $*$: $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$x * y = xy + ax + by, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \qquad (1)$$

où $a, b \in \mathbb{R}$ sont deux paramètres.

1. Montrer que la loi " $*$ " est commutative si et seulement si $a = b$.
2. Montrer que la loi " $*$ " est à la fois associative et commutative si et seulement si le couple (a, b) est soit $(0, 0)$ soit $(1, 1)$.
3. Pour chacun des deux couples précédents, écrire explicitement la définition (1) et ensuite répondre aux questions suivantes :
   (a) Indiquer quel est l'élément neutre qui correspond à la loi en question (s'il existe).
   (b) Trouver les éléments inversibles par rapport à la loi.
   (c) La loi induit-elle une structure de groupe commutatif sur $\mathbb{R}$?

Mise en garde : pour chaque couple (a, b) la relation (1) définit une loi de composition. A la question 3 on demande d'étudier seulement les deux lois qui correspondent aux couples $(0, 0)$ et $(1, 1)$.

Exercice 2 : Soit P un polynôme à coefficients réels de degré $n \in \mathbb{N}^*$. Soit P' son polynôme dérivé.

1. Ecrire le théorème de division euclidienne de P par P' et spécifier les degrés maximaux que peuvent avoir les polynômes quotient et reste de cette division.
2. On suppose que P' divise P.
   (a) Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $P(X) = \frac{1}{n}(X - a) \cdot P'(X)$.
   (b) Soit $m \in \{1, \ldots, n\}$ l'ordre de multiplicité de la racine a de P (i.e. $\exists Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(X) = (X - a)^m \cdot Q(X)$ et $Q(a) \neq 0$). Montrer qu'on a nécessairement $m = n$.
   (c) En déduire la forme factorisée de P.
   (d) Si $P^{(k)}$ est le polynôme dérivé k-ième de P, montrer qu'on a précisement :

$$P(X) = \frac{P^{(n)}(X)}{n!} (X - a)^n.$$

(*Indication pour (2.b) :* On pourrait dériver la relation donnée dans la parenthèse et utiliser la question précédente)

— tournez la page —

Exercice 3 : Soit φ l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même définie par

$$\varphi\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3x_1-4x_2-2x_3\\x_1+2x_2+x_3\\2x_1+2x_2+x_3\end{pmatrix}$$

où les vecteurs sont écrits dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Donner la matrice A de φ relativement à la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$.
2. Interpréter les colonnes de la matrice A. Déterminer une base de l'image de A.
3. Quel est le rang de la matrice A ? En déduire la dimension du noyau de φ.
4. Déterminer une base du noyau de φ.
5. Soient maintenant $v_1 = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$; $v_2 = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$; $v_3 = \begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}$.
   (a) Calculer le déterminant de la matrice dont les trois colonnes sont, dans l'ordre, v_1, v_2, et v_3.
   (b) Montrer que ces trois vecteurs forment une base de $\mathbb{R}^3$, qu'on notera $\mathcal{B}'$.
6. Calculer $\varphi(v_1)$, $\varphi(v_2)$, $\varphi(v_3)$ et les exprimer en fonction de v_1, v_2, v_3.
7. En déduire la matrice A' de φ relativement à la base $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3)$.
8. Écrire la matrice de passage P, depuis la base canonique $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{B}'$.
9. Calculer son inverse P^{-1}.
10. Quelle est la relation entre A, P, P^{-1} et A' ?
11. Calculer $(A')^{2006}$.

Exercice 4 : Soit la matrice à coefficients réels

$$A = \begin{pmatrix}-1&3&-1\\-3&5&-1\\-3&3&1\end{pmatrix} .$$

1. Calculer son polynôme caractéristique.
2. Calculer les valeurs propres de A.
3. Calculer les sous-espaces propres correspondant aux valeurs propres de A.
4. Quelle est la somme des sous-espaces propres ?
5. Cette somme est-elle directe ? La matrice A est-elle diagonalisable ?

Barème indicatif : Total = 26 points.
Nota bene : Réponses concises + trêve au bla-bla = temps épargné + correcteur bienveillant