CORRIGÉ de l'EXAMEN de MATHEMATIQUES M2

Session de rattrapage : SESSION 2

2005 - 2006 (13 JUIN 2006)

EXERCICE 1

(1) • M.q. l'addition est loi interne à $\mathcal{M}$

• Ensuite, soit on m.q. c'est un groupe abélien, soit qu'il est sous-groupe de $M_{3,2}(\mathbb{R})$ (ça revient au même pour la long.)

(2) En utilisant (1) on n'a plus qu'à vérifier que si $\lambda \in \mathbb{R}$ et $A \in \mathcal{M}$, alors $\lambda A \in \mathcal{M}$, ce qui est évident.

(3) (a) Simple calcul : pour A_1 par ex. $a_1 = 1$, $b_1 = 3$, $c_1 = 0$ et $4 = 1+3 = a_1 + b_1$, les zéros des positions fixes de $A \in \mathcal{M}$ étant respectés... $\Rightarrow A_1 \in \mathcal{M}$.

(b) Formons la combinaison $\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3 \equiv B$

Alors $B = \begin{pmatrix} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 & 0 \\ 0 & 4\lambda_1 + 3\lambda_2 \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 & \lambda_2 + \lambda_3 \end{pmatrix}$ et $B = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 4\lambda_1 + 3\lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \quad (*)$$

Si on montre que le rang de ce système $= 3$ alors ceci veut dire qu'une des eq. est inutile et que le système résultant après l'avoir éliminée est un système de Cramer qui n'admet que la sol. nulle $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0,0,0)$.

Mais la ligne n°2 du syst. est par la déf. de $\mathcal{M}$ combinaison (somme) des lignes 1 et 3. Donc on la jette.

Alors le déterminant attaché au système restant est

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -9 \neq 0.$$

Donc c'est un syst. de Cramer.

(c) La question est : $\forall B \in \mathcal{M}$ $\exists ?$ $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ t.q.

$$B = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3. \quad (**)$$

Alors on procède comme à la question (b) :

si $B = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha+\beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}$ avec $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ arbitrairement choisis et (ensuite) fixés, $(**)$ équivaut à un système semblable en tout point à $(*)$ mais tel que les membres de droite des equations sont, respectivement, $\alpha, \alpha+\beta, \beta, \gamma$.

Or, on a vu que ce système est de rang 3, et, en éliminant (jetant) la 2ème eq. on obtient un système de CRAMER. Donc non seulement que $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ existe pour chaque triplet (α, β, γ), mais il est unique.

Conclusion : $\{A_1, A_2, A_3\}$ est une base pour $\mathcal{M}$.

(4) On sait que $\dim M_{3,2}(\mathbb{R}) = 3 \times 2 = 6$ et on vient de voir à (3) a&b que $\dim \mathcal{M} = 3$. Alors, si $\mathcal{S}$ est un supplément. de $\mathcal{M}$ ds $M_{3,2}$ on a (par déf)

$\mathcal{M} \oplus \mathcal{S} = M_{3,2} \Rightarrow \dim \mathcal{S} = \dim M_{3,2} - \dim \mathcal{M} = 6 - 3 = 3$.

EXERCICE 2 :

(1) Le th. de division euclidienne dit : $\exists Q, R \in \mathbb{R}[X]$ tq

$$\begin{cases} P = X(X-1) \cdot Q + R & (*)' \\ d^\circ R \leq d^\circ X(X-1) - 1 = 1 & (**) \end{cases}$$

Donc R est nécessairement un polynôme de degré $= 1$, qui a l'expression "a priori" $R = aX + b$.

On pose alors ds. $(*)'$ $X = 0$ et $X = 1$, d'où :

$$\begin{cases} P(0) = b \\ P(1) = a+b \end{cases} \underset{\text{Hyp.}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} 1 = b \\ a+b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a = 0 \end{cases} \text{ d'où } R$$

est égal à 1, c'est à dire $(*)'$ devient $(*)$ de l'énoncé.

② Observons déjà : $d^\circ(X-1)\cdot X \cdot Q$ vaut au moins 2 donc $> 0 = d^\circ R$ (car $R = 1$). Alors on a :

$$d^\circ P \underset{(*)}{=} d^\circ\big(X(X-1)\cdot Q + 1\big) \underset{\uparrow}{=} \max\big(d^\circ X(X-1)\cdot Q, d^\circ 1\big)$$

$$= d^\circ\big(X(X-1)\cdot Q\big) =$$

on a éliminé le cas d'inégalité du théorème général sur le d°. de la somme.

$$= d^\circ X(X-1) + d^\circ Q = 2 + d^\circ Q,$$

③ En suivant l'indication, on écrit les expressions "a priori" de P et Q : $P = a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n$ avec $a_i \in \mathbb{Z}$, et, par (2) : $Q = b_0 + b_1X + \ldots + b_{n-2}X^{n-2}$.

Dans ce cas, $(*)$ devient

$$a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n = X(X-1)(b_0 + b_1X + \ldots + b_{n-2}X^{n-2}) + 1$$

$$\Leftrightarrow (a_0 - 1) + (a_1 + b_0)X + (a_2 - b_0 + b_1)X^2 + \ldots +$$

$$+ (a_{n-1} - b_{n-3} + b_{n-2})X^{n-1} + (a_n - b_{n-2})X^n = 0$$

Or, comme $\{1, X, \ldots, X^n\}$ est un système libre de polynômes il résulte qu'on a nécessairement :

$$\left\{\begin{array}{l} a_0 = 1 \text{ (celle-ci est une cond. sur } P \text{ qui suit de } P(0)=1) \\ b_0 = -a_1 \in \mathbb{Z} \text{ par hyp.} \\ b_1 = b_0 - a_2 \in \mathbb{Z} \text{ par hyp. et par éq. précédente} \\ b_n \end{array}\right. \Rightarrow b_0, \ldots b_{n-2} \text{ sont tous entiers.}$$

EXERCICE 3 : ① $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} au_n + bv_n \\ cu_n + dv_n \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 2u_n + 4v_n \\ 1 \cdot u_n + 2v_n \end{pmatrix}$

$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $(S) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix}$.

② Recurrence finie $X_n = A^1X_{n-1} = A^2X_{n-2} = \ldots = A^n X_{n-n}$.

③ ⓐ $P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 4 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 - 4$

ⓑ $P(\lambda) = 0 \Leftrightarrow (2-\lambda)^2 = 4 \Leftrightarrow \lambda(\lambda - 4) = 0$.

Donc les v.p. de A sont $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = 4 \Rightarrow$ elles différentes entre elles $\to A$ est diagonalisable. (cf. cours)

ⓒ Les sous-esp. propres de A sont $\mathrm{Ker}(A - \lambda_i I) \equiv E_{1,2}$.

- $(A - 0 \cdot I)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2x + 4y \\ x + 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x + 2y = 0 \to$

$\Rightarrow E_1 = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

- $(A - 4I)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x - 2y = 0 \Rightarrow E_2 = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

et on a, bien sûr, $\mathbb{R}^2 = E_1 \oplus E_2$.

ⓓ $P = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; ⓔ $P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

ⓕ Simple calcul ou application du cours : $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

ⓖ $A^n = (PDP^{-1})^n = (PDP^{-1})^{n-1} PDP^{-1} \underset{\text{recurr.}}{\overset{\text{Hyp.}}{=}} PD^{n-1}\underbrace{P^{-1}P}_{=I}DP^{-1}$

ⓗ $D^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2^{2n} \end{pmatrix} \underset{(g)}{\Rightarrow} A^n = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2^{2(n-1)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$\boxed{A^n = 2^{2(n-1)}A.}$$

④ $X_n = A^nX_0 = 2^{2(n-1)}AX_0 = 2^{2(n-1)}\begin{pmatrix} 2u_0 + 4v_0 \\ u_0 + 2v_0 \end{pmatrix} = 2^{2(n-1)}\begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} u_n = 5 \cdot 2^{2n-1} \\ v_n = 5 \cdot 2^{2(n-1)} \end{cases}.$$