L1-M2-[2005-2006] SESSION 1

CORRIGÉ de l'EXAMEN de MATHEMATIQUES M2 du 19 mai 2006

EXERCICE 1 :

① $x*y = y*x \Leftrightarrow ax+by = ay+bx \Leftrightarrow (a-b)(x-y)=0 \Leftrightarrow a=b$
où on a utilisé la commut. du produit usuel ds. $\mathbb{R}$ et le fait que $x\neq y$ en gén.

② $x*(y*z) = (x*y)*z \Leftrightarrow \ldots$ calculs $\underset{a=b}{\Leftrightarrow}$ où l'on tient compte que

$\Leftrightarrow \cancel{xyz} + a(\cancel{xz}+yz+xy)+a^2(y+z)+ax = \cancel{xyz}+a(\cancel{xz}+yz+xy) + a^2(x+y)+az$

$\Leftrightarrow a(ax+\cancel{ay}-\cancel{ay}-az+z-x)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a(a-1)(x-z)=0 \Leftrightarrow a=0$ ou $a=1$ car $x\neq z$ en général

③ • $(a,b)=(0,0) \Rightarrow (1) \Leftrightarrow x*y = xy$ donc c'est la multiplic. usuelle en $\mathbb{R}$, qui admet l'él. neutre $1\in\mathbb{R}$ et $\forall x\neq 0$ est inversible l'inverse étant $1/x \in \mathbb{R}$. Mais $x=0$ n'est pas inversible $\Rightarrow$ ce n'est pas groupe

• $(a,b)=(1,1) \Rightarrow (1) \Leftrightarrow x*y = xy+x+y$. On a $\forall x\in\mathbb{R}$: $x*0 = x$ donc 0 est l'él. neutre recherché. Pour chercher l'inverse de x on doit résoudre : $x*y=0 \Leftrightarrow y(x+1)=-x$
Donc $\forall x\neq -1$ admet un inverse $x^{-1} = -\frac{x}{x+1}$ et $x=-1$ n'est pas inversible (l'eq. $(-1)y+y+(-1)=0$ est impossible) donc ce n'est pas groupe. ■

EXERCICE 2 :

① • $\exists! Q, R \in \mathbb{R}[X]$ t.q. $\begin{cases} P = P'\cdot Q + R & (1) \\ d^\circ R \leq d^\circ P' - 1. & (2) \end{cases}$

• M.q. $d^\circ Q = 1$: On écrit (1) comme : $R = P - P'\cdot Q$ donc $d^\circ R = d^\circ(P - P'\cdot Q)$ (1'). On a les cas de figure suivants :

→ $d^\circ Q = 1$: comme $d^\circ P' = n-1$ et $d^\circ P = n$ on a donc $d^\circ P = d^\circ P' + d^\circ Q = d^\circ(P'Q)$ d'où $d^\circ R = d^\circ(P-P'Q) \leq \max\{d^\circ P, d^\circ(P'Q)\} = d^\circ P = n$. O.K.

→ $d^\circ Q > 1$: alors $d^\circ(P'Q) > d^\circ P$ donc $d^\circ R = \max\{d^\circ P, d^\circ(P'Q)\} = d^\circ P'Q$ $\Rightarrow d^\circ R > d^\circ P' + d^\circ Q > d^\circ P' + 1$ ce qui contredit (2)

→ $d^\circ Q < 1$: alors $d^\circ(P'Q) < d^\circ P$ donc $d^\circ R = d^\circ P > d^\circ P'$ donc (2) est contredit.

Conclusion : on ne peut avoir que $d^\circ Q = 1$ i.e. $Q(X) = \alpha X + \beta$ avec $\alpha \neq 0$.

② Dans ce cas on a : $P = P'\cdot(\alpha X + \beta)$. $(*)$

ⓐ Si $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$, alors $P' = a_1 + 2a_2 X + \ldots + n a_n X^{n-1}$.
Donc $(*) \Leftrightarrow P = \ldots + \alpha n a_n X^n \Rightarrow a_n(1-\alpha n) = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{n}$
Donc $P = P'\cdot\left(\frac{1}{n}X + \beta\right) = \frac{1}{n}(X + n\beta)\cdot P'$. Donc $\exists a = -n\beta$ t.q. $P = \frac{1}{n}(X-a)\cdot P'$ $(*')$

ⓑ En dérivant $P = (X-a)^m \cdot Q$ on obtient :
$P' = m(X-a)^{m-1}\cdot Q + (X-a)^m \cdot Q'$ qu'on introduit en $(*')$

$(X-a)^m \cdot Q \equiv P = \frac{1}{n}(X-a)\left(m(X-a)^{m-1}\cdot Q + (X-a)^m \cdot Q'\right)$

$\Leftrightarrow Q - \frac{1}{n}\cdot mQ = \frac{1}{n}(X-a)\cdot Q' \Longrightarrow$ on pose a à la place de X

$\Rightarrow Q(a)\cdot\left(1 - \frac{m}{n}\right) = 0 \underset{Q(a)\neq 0}{\Longrightarrow} m = n$.

ⓒ La question précédente dit que la racine a est la seule racine de P et qu'elle est de multiplicité $= d^\circ P$, donc toutes les racines de P sont confondues si P' divise P. On a :
$P(X) = \lambda(X-a)^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

ⓓ On peut terminer vite en invoquant la formule de Taylor :
$P(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{n!}(X-a)^n$, qui étant unique, fournit par comparaison avec la forme de P donnée à ⓒ :
$P^{(k)}(a) = 0 \ \forall k = 0,\ldots,n-1$ et $\lambda = \frac{P^{(n)}(a)}{n!}$. Par ailleurs
$d^\circ P^{(n)} = d^\circ P - n = n - n = 0 \Rightarrow P^{(n)}(X) = cte \neq 0$ i.e.
$P^{(n)}(a) = P^{(n)}(X)$, d'où la formule demandée.
Sinon, on peut dériver successivement $P(X) = \lambda(X-a)^n$:
$P'(X) = \lambda\cdot n(X-a)^{n-1}, \ldots, P^{(n)}(X) = \lambda n!(X-a)^0 \Rightarrow \lambda = \frac{P^{(n)}(X)}{n!}$.

Autre preuve de (b), (c), (d) : On dérive $(*') \Rightarrow \ldots \Rightarrow P' = \frac{1}{n-1}(X-a)P''$ d'où $P = \frac{1}{n(n-1)}(X-a)^2 P'' \ldots$ et ainsi de suite. Après un nb. de n pas, on obtient $P(X) = \frac{1}{n!}P^{(n)}(X)\cdot(X-a)^n$, formule qui donne une réponse simultanée à (b), (c) et (d). ■

EXERCICE 3 :

① $\varphi\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\1\\2\end{pmatrix}$; $\varphi\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\2\\2\end{pmatrix}$; $\varphi\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)=\begin{pmatrix}-3&-4&-2\\1&2&1\\2&2&1\end{pmatrix}\equiv A$.

② Les colonnes de A engendrent l'image de A, qui est s.e.v. de $\mathbb{R}^3$.
Par pivot de Gauss on a :
$\begin{pmatrix}-3&-4&-2\\1&2&1\\2&2&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&1\\-3&-4&-2\\2&2&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&1\\0&2&1\\0&-2&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&1\\0&2&1\\0&0&0\end{pmatrix}\Big\}$ 2 lignes non toutes nulles donc $\mathrm{rang}\,A=2$

i.e. $\dim \mathrm{Im}A=2$. <u>Obs</u> : on aurait pu m.q. $\det A=0$ et trouver un mineur 2×2 qui soit $\neq 0$. Les colonnes de ce mineur sont parties des colonnes de A qui, vues comme vecteurs, sont lin. indép. Par ex : $\begin{pmatrix}-3\\1\\2\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}-4\\2\\2\end{pmatrix}$ forment une base de l'image de A (ceci sont par ailleurs les vect-colonnes des pivots).

③ $\mathrm{rang}\,A=2$ et le th. du rang : $\dim\ker A+\dim\mathrm{Im}A=\dim\mathbb{R}^3$ fournit $\dim\ker A=3-2=1$.

④ $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\in\ker A\Leftrightarrow A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1+2x_2+x_3=0\\-3x_1-4x_2-2x_3=0\\2x_1+2x_2+x_3=0\end{cases}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-x_3/2\\x_3\end{pmatrix}\Rightarrow\ker A=\mathrm{Vect}\begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}$.

⑤ a) $\det\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&0&-1\\0&1&2\end{pmatrix}=1\begin{vmatrix}0&-1\\1&2\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}-1&-1\\0&2\end{vmatrix}+0=-1$

b) $\det\neq0\Rightarrow$ rang de la matrice $(v_1,v_2,v_3)=3\Rightarrow(v_1,v_2,v_3)=$ base

⑥ Par calcul : $\varphi(v_1)=v_1$; $\varphi(v_2)=-v_2$; $\varphi(v_3)=0$.

⑦ $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(\varphi)\equiv A'=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

⑧ $P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}\equiv\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}(\mathrm{Id})$ qui vient de

$\begin{cases}\mathrm{Id}(v_1)\equiv v_1=(1,-1,0)^T_{\mathcal{B}}\\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\\ \mathrm{Id}(v_3)\equiv v_3=(0,-1,2)^T_{\mathcal{B}}\end{cases}\Rightarrow P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&0&-1\\0&1&2\end{pmatrix}$

⑨ Son inverse se calcule en résolvant le syst. ci-dessus en inconnues e_i, $i=1,2,3$ $\in\mathcal{B}$! On obtient finalement

$\begin{cases}\mathrm{Id}(e_1)\equiv e_1=-v_1-2v_2+v_3\\\mathrm{Id}(e_2)=e_2=-2v_1-2v_2+v_3\\\mathrm{Id}(e_3)=e_3=-v_1-v_2+v_3\end{cases}\Rightarrow P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}=\begin{pmatrix}-1&-2&-1\\-2&-2&-1\\1&1&1\end{pmatrix}$

⑩
$$\begin{array}{ccc}(\mathbb{R}^3,\mathcal{B}) & \xrightarrow{\quad A\quad} & (\mathbb{R}^3,\mathcal{B})\\ \uparrow P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}\equiv P^{-1} & & \downarrow P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}\equiv P\\ (\mathbb{R}^3,\mathcal{B}') & \xrightarrow[\quad A'\quad]{} & (\mathbb{R}^3,\mathcal{B}')\end{array}$$

Donc du diagramme résulte :
$$A'=PAP^{-1}.$$

⑪ $(A')^{2006}=\begin{pmatrix}1^{2006}&0&0\\0&(-1)^{2006}&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ ■

EXERCICE 4

① $\det(A-\lambda I)=\det\begin{pmatrix}-1-\lambda&3&-1\\-3&5-\lambda&-1\\-3&3&1-\lambda\end{pmatrix}\overset{\boxed{\substack{L_2-L_1\to L_2\\L_3-L_1\to L_3}}}{=}\det\begin{pmatrix}-(1+\lambda)&3&-1\\\lambda-2&2-\lambda&0\\\lambda-2&0&2-\lambda\end{pmatrix}=$

$=-(\lambda-2)^2\det\begin{pmatrix}\lambda+1&-3&1\\1&-1&0\\1&0&-1\end{pmatrix}=-(\lambda-2)^2\det\begin{pmatrix}\lambda+2&-3&0\\1&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}=$

$=(-1)^6\det\begin{pmatrix}\lambda+2&3\\1&1\end{pmatrix}\cdot(\lambda-2)^2=(\lambda-1)(\lambda-2)^2$.

② Les v.p. sont les racines du polynôme caractéristique, donc $\lambda_1=1$ et $\lambda_2=2$ de multiplicités $m_{\lambda_1}=1$ et $m_{\lambda_2}=2$ respectivement.

③. $\mathrm{Ker}(A-\lambda_1I)=\mathrm{Ker}\begin{pmatrix}-2&3&-1\\-3&4&-1\\-3&3&0\end{pmatrix}$ et après avoir résolu le système on obtient : $(x,y,z)^T\in\mathrm{Ker}(A-\lambda_1I)$ ssi $x=y=z$, d'où :
$\mathrm{Ker}(A-I)=\mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$. Notons v_1 ce vecteur

· $\mathrm{Ker}(A-\lambda_2I)=\mathrm{Ker}\begin{pmatrix}-3&3&-1\\-3&3&-1\\-3&3&-1\end{pmatrix}$ et $(x,y,z)^T\in\mathrm{Ker}(A-\lambda_2I)$ ssi $-3x+3y-z=0$ (équation du plan $\subseteq\mathbb{R}^3$ qui est l'esp. propre de $\lambda_2=2$) donc $(x,y,z)^T\in\mathrm{Ker}(A-2I)$ ssi il est de la forme $(x,y,-3(x-y))^T=x(1,0,-3)^T+y(0,1,3)^T$ d'où
$\mathrm{Ker}(A-2I)=\mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}\right\}$. Notons v_{21} et v_{22} ces vect.

④ et ⑤ : On a vu à (3) que $\dim\mathrm{Ker}(A-\lambda_1I)=1$ et $\dim\mathrm{Ker}(A-\lambda_2I)=2$ et ces deux dimensions coïncident avec les multiplicités de λ_1 et λ_2 resp. $\Rightarrow$ <u>A est diagonalisable</u>
Aussi, par thm. du cours, comme $\lambda_1\neq\lambda_2$ l'intersection des deux esp. propres est $\{0\}$, donc leur somme est directe (chose qui peut être vérifiée sur ce cas particulier aussi en m.q. le rang de la matrice (v_1,v_{21},v_{22}) est 3). Aussi, étant des s.e.v. de $\mathbb{R}^3$ et comme la somme de leur dim. $=3$:
$\dim\mathrm{Ker}(A-\lambda_1I)+\dim\mathrm{Ker}(A-\lambda_2I)=\dim\mathbb{R}^3$ (i.e. ils sont supplémentaires)
il résulte que leur somme est $\mathbb{R}^3$ et elle est directe. ■