L1 - S2 - "Calculus" - 2014/2015 - **Examen du 19 mai 2015** - Session 1

Examen de Mathématiques "Calculus"

Durée: **3** heures – les documents, calculatrices, téléphones, smartphones et tablettes ne sont pas autorisés

---

Exercice 1 : **1.a)** Soit $P(X) = X^3 + 2X^2 + 2X + 1$. Vérifier que -1 est racine de P et en déduire la factorisation de P en polynômes irréductibles sur $\mathbb{R}$.

1.b) Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ la fraction rationnelle $F(X) = \dfrac{2X+3}{X^3+2X^2+2X+1}$.

1.c) Calculer l'intégrale: $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{x-2}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x$.

1.d) En déduire la valeur de l'intégrale: $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{2x+3}{x^3+2x^2+2x+1}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 2 : Calculer les primitives suivantes sur les domaines indiqués:

1) $I(t) = \displaystyle\int_{-t}^{t} \cos x\, \ln(1+\cos x)\,\mathrm{d}x$ sur $]-\pi,\pi[$. (Indication: parité, IPP et $\sin^2 = 1-\cos^2$)

2) $J(t) = \displaystyle\int_0^t \mathrm{e}^{2x}\cos^2 x\,\mathrm{d}x$ sur $\mathbb{R}$. (Indication: linéarisation trigo, puis IPP et/ou changement de variable)

3) Soit $R(x) = f(x)\,\mathrm{d}x$ où $f(x) = \dfrac{\sin(2x)}{\cos^4 x + \sin^4 x}$.

3.a) Calculer $R(-x)$, $R(\pi+x)$ et les comparer à $R(x)$. En déduire le plus efficace changement de variables pour le calcul de la primitive $F(t) = \displaystyle\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x$. (Indication: règles de Bioche)

3.b) Calculer l'expression de $F(t)$ sur $\mathbb{R}$.
(Indication: on pourra utiliser les formules de linéarisation $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$)

Exercice 3 : Résoudre les équation différentielles linéaires suivantes:

1) $y'' - 2y' + y = x$ sur $\mathbb{R}$ et **2)** $y' - \dfrac{2\ln x}{x} y = x^{\ln x - 1}$ sur $]\mathrm{e},\infty[$.

Pour chacune d'entre elles on présentera séparement $\mathcal{S}_0$, l'espace vectoriel des solutions de l'équation avec second membre nul associée. On trouvera ensuite une solution particulière et on donnera finalement $\mathcal{S}$, l'ensemble des solutions pour chacune de ces deux équations.
(Indication pour 2): exprimer le second membre de l'équation sous une forme exponentielle de base e)

Exercice 4 : Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x^4 + y^4 - x^2 - y^2$.

1) Ses dérivées partielles (notées par $\partial_x f \equiv \frac{\partial f}{\partial x}$ et $\partial_y f \equiv \frac{\partial f}{\partial y}$) étant définies sur $\mathbb{R}^2$, calculer leur expression en un point arbitraire $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

2) Calculer $f(1,1)$ et donner l'équation du plan tangent au graphe de f au point $M(1,1,f(1,1))$.

3) Trouver l'ensemble des points critiques de f.

4) Calculer les valeurs de f pour les quatre points $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ et $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Montrer qu'en chacun de ces points f admet un minimum local.
(Indication: on pourra mettre $f(x,y)$ sous la forme $(x^2-a)^2 + (y^2-b)^2 - c^2)$.

5) Calculer $f(0,0)$ et montrer que $(0,0)$ est un point où f atteint un maximum local.
(Indication: dans un voisinage de 0, on a $t^2 \le |t|$).

6) Calculer $f(0,\frac{1}{\sqrt{2}})$ et montrer que $(0,\frac{1}{\sqrt{2}})$ est un point de selle pour f.
(Indication: on pourra étudier les variations des fonctions partielles $y \mapsto f(0,y)$ et $x \mapsto f(x,\frac{1}{\sqrt{2}})$ autour des points $y = \frac{1}{\sqrt{2}}$, et $x = 0$, respectivement).

7) Supposons connu que les autres points critiques de f ne sont pas des extrema. Alors peut-on dire que f admet un extremum (minimum ou maximum) *global* sur $\mathbb{R}^2$?