Corrigé de l'examen

Questions de cours.

1. Les formules d'Euler du cosinus et du sinus s'écrivent

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

2. Soit $(P_1, P_2) \in K[X]^2$, avec $P_2 \neq 0$. Le théorème de la division euclidienne affirme l'existence d'un unique couple $(Q, R) \in K[X]^2$ tel que

$$P_1 = QP_2 + R \quad \text{et} \quad d^\circ(R) < d^\circ(P_2).$$

Les polynômes Q et R sont respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne du polynôme P_1 par le polynôme P_2.

3. Une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite convergente si et seulement s'il existe un nombre réel ℓ tel que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq N, |u_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

4. Le théorème des suites adjacentes affirme que deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ adjacentes, soit telles que

(i) la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante,
(ii) la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante,
(iii) $v_n - u_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$,

sont convergentes de même limite ℓ, avec

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq \ell \leq v_n.$$

Exercice 1.

1.a. Rappelons que

$$\forall x + iy \in \mathbb{C}, (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy.$$

Nous calculons donc

$$z^2 = 2 + \sqrt{3} - 2 + \sqrt{3} + 2i\sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = 2\sqrt{3} + 2i\sqrt{4-3} = 2\sqrt{3} + 2i.$$

Comme

$$e^{\frac{i\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2},$$

la forme exponentielle du nombre z^2 s'écrit

$$z^2 = 4e^{\frac{i\pi}{6}}.$$

b. Il découle de la question 1.a et de la formule exponentielle d'une racine carrée que

$$z = \pm 2e^{\frac{i\pi}{12}}.$$

Comme $\mathrm{Re}(z) = \sqrt{2+\sqrt{3}} > 0$ et

$$\mathrm{Re}\left(2e^{\frac{i\pi}{12}}\right) = 2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) > 0,$$

nous concluons que

$$z = 2e^{\frac{i\pi}{12}}.$$

c. Il découle de la question 1.b que

$$z = 2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + 2i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right),$$

ce qui assure par définition du nombre complexe z que

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}.$$

2.a. Nous calculons

$$\omega^2 = 1 - 2\sqrt{2} + 2i + 2 - 2\sqrt{2}i - 1 = 2 - 2\sqrt{2} + i(2 - 2\sqrt{2}).$$

b. Le discriminant de l'équation vaut

$$\Delta = (\sqrt{2} + 1 + i)^2 - 4\sqrt{2}(1+i) = (2 - 2\sqrt{2})(1+i) \neq 0,$$

de sorte que l'équation a bien deux solutions distinctes z_1 et z_2. D'après la question 2.a, le discriminant est égal à

$$\Delta = \omega^2.$$

Les deux solutions de l'équation valent donc, à l'ordre près,

$$z_1 = \frac{\sqrt{2} + 1 + i + \omega}{2\sqrt{2}} = \frac{1+i}{\sqrt{2}},$$

et

$$z_2 = \frac{\sqrt{2} + 1 + i - \omega}{2\sqrt{2}} = 1.$$

c. Rappelons que

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Il résulte ainsi de la question 2.b que

$$z_1 = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = e^{\frac{i\pi}{4}},$$

tandis que

$$z_2 = 1 = e^{0i}.$$

d. Rappelons que les formes exponentielles des trois racines cubiques du nombre complexe $\rho e^{i\theta}$ sont données par les expressions

$$\rho^{\frac{1}{3}} e^{\frac{i\theta}{3}}, \quad \rho^{\frac{1}{3}} e^{\frac{i(\theta+2\pi)}{3}} \quad \text{et} \quad \rho^{\frac{1}{3}} e^{\frac{i(\theta+4\pi)}{3}},$$

lorsque $\rho > 0$. D'après la question 1.c, les trois racines cubiques de z_1 sont donc

$$e^{\frac{i\pi}{12}}, \quad e^{\frac{9i\pi}{12}} \quad \text{et} \quad e^{\frac{17i\pi}{12}},$$

tandis que celles de z_2 valent

$$e^{0i}, \quad e^{\frac{2i\pi}{3}}, \quad \text{et} \quad e^{\frac{4i\pi}{3}}.$$

e. Rappelons qu'un polynôme de degré 6 a au plus 6 racines, de sorte que l'équation

$$\sqrt{2}z^6 - (\sqrt{2}+1+i)z^3 + 1 + i = 0,$$

a au plus 6 racines. En outre, si z est une racine cubique de z_1 ou de z_2, la question 2.b assure que $Z = z^3 (= z_1 \text{ ou } z_2)$ est une solution de l'équation algébrique du second degré

$$\sqrt{2}Z^2 - (\sqrt{2}+1+i)Z + 1 + i = 0,$$

ce qui garantit que

$$\sqrt{2}z^6 - (\sqrt{2}+1+i)z^3 + 1 + i = 0.$$

D'après la question 2.d, les nombres z_1 et z_2 ont un total de 6 racines cubiques distinctes, qui sont donc toutes solutions de cette équation de degré 6. Par conséquent, les solutions de cette équation sont exactement les 6 racines cubiques de z_1 et de z_2, dont il ne reste plus qu'à calculer la forme algébrique.

Commençons pas les racines cubiques de z_2 dont la forme algébrique s'écrit

$$e^{0i} = 1, \quad e^{\frac{2i\pi}{3}} = \cos\Big(\frac{2\pi}{3}\Big) + i\sin\Big(\frac{2\pi}{3}\Big) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

et

$$e^{\frac{4i\pi}{3}} = \cos\Big(\frac{4\pi}{3}\Big) + i\sin\Big(\frac{4\pi}{3}\Big) = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

En ce qui concerne celles de z_1, nous avons

$$e^{\frac{9i\pi}{12}} = e^{i\left(\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi}{3}\right)} = e^{\frac{i\pi}{12}}\, e^{\frac{2i\pi}{3}} \quad \text{et} \quad e^{\frac{17i\pi}{12}} = e^{i\left(\frac{\pi}{12}+\frac{4\pi}{3}\right)} = e^{\frac{i\pi}{12}}\, e^{\frac{4i\pi}{3}}.$$

D'après les formules précédentes et la question 1.c, ces trois racines cubiques valent

$$e^{\frac{i\pi}{12}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} + i\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2},$$

$$e^{\frac{9i\pi}{12}} = \frac{1}{4}\Big(- \sqrt{2+\sqrt{3}} - \sqrt{6-3\sqrt{3}} + i\big(\sqrt{6+3\sqrt{3}} - \sqrt{2-\sqrt{3}}\big)\Big),$$

et

$$e^{\frac{17i\pi}{12}} = \frac{1}{4}\Big(- \sqrt{2+\sqrt{3}} + \sqrt{6-3\sqrt{3}} + i\big(- \sqrt{6+3\sqrt{3}} - \sqrt{2-\sqrt{3}}\big)\Big).$$

En conclusion, les formes algébriques des six racines recherchées sont

$$1 \; ; \; -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \; ; \; -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \; ; \; \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} + i\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \; ;$$

$$\frac{1}{4}\Big(- \sqrt{2+\sqrt{3}} - \sqrt{6-3\sqrt{3}} + i\big(\sqrt{6+3\sqrt{3}} - \sqrt{2-\sqrt{3}}\big)\Big) \; ;$$

et

$$\frac{1}{4}\Big(- \sqrt{2+\sqrt{3}} + \sqrt{6-3\sqrt{3}} + i\big(- \sqrt{6+3\sqrt{3}} - \sqrt{2-\sqrt{3}}\big)\Big).$$

Exercice 2.

1.a. Nous calculons

$$P_a(1) = 1+a-(a+1)-(a+1)+a+1 = 0 \quad \text{et} \quad P_a(-1) = -1+a+(a+1)-(a+1)-a+1 = 0,$$

de sorte que -1 et 1 sont racines du polynôme P_a.

b. Les premiers polynômes dérivés du polynôme P_a sont égaux à

$$P_a' = 5X^4 + 4aX^3 - 3(a+1)X^2 - 2(a+1)X + a,$$

$$P_a'' = 20X^3 + 12aX^2 - 6(a+1)X - 2(a+1),$$

$$P_a''' = 60X^2 + 24aX - 6(a+1),$$

et

$$P_a^{(4)} = 120X + 24a.$$

Nous avons par conséquent

$$P_a'(1) = 0, \quad P_a''(1) = 12 + 4a, \quad P_a'''(1) = 54 + 18a \quad \text{et} \quad P_a^{(4)}(1) = 120 + 24a.$$

Lorsque $a \neq -3$, le nombre $P_a''(1)$ est non nul, et l'ordre de multiplicité de la racine 1 est égal à 2. Par contre, si $a = -3$, alors

$$P_a''(1) = P_a'''(1) = 0 \quad \text{et} \quad P_a^{(4)}(1) = 48 \neq 0,$$

et l'ordre de multiplicité de la racine 1 est égal à 4.

De même, nous obtenons

$$P_a'(-1) = 4 - 4a, \quad P_a''(-1) = 16a - 16 \quad \text{et} \quad P_a'''(-1) = 54 - 30a.$$

Quand $a \neq 1$, le nombre $P_a''(-1)$ est non nul, et l'ordre de multiplicité de la racine 1 est égal à 1. Lorsque $a = 1$, il vient

$$P_a'(-1) = P_a''(-1) = 0 \quad \text{et} \quad P_a'''(-1) = 24 \neq 0,$$

de sorte que l'ordre de multiplicité de la racine 1 vaut 3.

2.a. Comme

$$(X+1)(X-1)^2 = X^3 - X^2 - X + 1,$$

la division euclidienne du polynôme P_a par le polynôme $(X+1)(X-1)^2$ s'écrit

$$\begin{array}{cccccl|l}
 & X^5 & + & aX^4 & - & (a+1)X^3 - (a+1)X^2 + aX + 1 & X^3 - X^2 - X + 1 \\
\cline{7-7}
- & (X^5 & - & X^4 & - & X^3 + X^2) & X^2 + (a+1)X + 1 \\
\cline{2-6}
 & & & (a+1)X^4 & - & aX^3 - (a+2)X^2 + aX + 1 & \\
 & & - & ((a+1)X^4 & - & (a+1)X^3 - (a+1)X^2 + (a+1)X) & \\
\cline{2-6}
 & & & & & X^3 - X^2 - X + 1 & \\
 & & & & - & (X^3 - X^2 - X + 1) & \\
\cline{2-6}
 & & & & & 0 &
\end{array}$$

Le quotient Q_a et le reste R_a de cette division euclidienne sont donc égaux à

$$Q_a = X^2 + (a+1)X + 1 \quad \text{et} \quad R_a = 0.$$

b. La division euclidienne de la question 2.a assure que

$$P_a = (X+1)(X-1)^2 Q_a.$$

Pour $a = -3$, nous avons

$$Q_a = X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2,$$

de sorte que la décomposition en facteurs irréductibles du polynôme P_a s'écrit

$$P_a = (X+1)(X-1)^4.$$

Lorsque $a = 1$, nous obtenons

$$Q_a = X^2 + 2X + 1 = (X+1)^2,$$

de sorte que la décomposition en facteurs irréductibles du polynôme P_a s'écrit

$$P_a = (X+1)^3(X-1)^2.$$

Exercice 3.

1.a. Nous calculons

$$\begin{aligned}\forall n \geq 1, a_{n+1} - 2 &= \frac{(n+2)a_n + 2(n^2+n-1) - 2(n+1)^2}{(n+1)^2} \\ &= \frac{(n+2)a_n - 2n - 4}{(n+1)^2} \\ &= \frac{(n+2)(a_n-2)}{(n+1)^2}.\end{aligned}$$

b. Montrons par récurrence que

$$\forall n \geq 1, a_n \geq 2.$$

Au rang $n = 1$, nous avons

$$a_1 = \alpha \geq 2.$$

Supposons donc que

$$\forall 1 \leq p \leq n, a_p \geq 2.$$

Au rang $n+1$, il découle de la question 1.a que

$$a_{n+1} - 2 = \frac{(n+2)(a_n-2)}{(n+1)^2}.$$

Comme $a_n - 2 \geq 0$ par l'hypothèse de récurrence, il vient

$$a_{n+1} - 2 \geq 0,$$

soit

$$a_{n+1} \geq 2.$$

Nous concluons par récurrence que

$$\forall n \geq 1, a_n \geq 2,$$

ce qui assure que la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ est minorée par 2.

2.a. Nous calculons

$$\forall n \geq 1, a_{n+1} - a_n = \frac{(n+2)a_n + 2(n^2+n-1) - a_n(n+1)^2}{(n+1)^2} = \frac{(2-a_n)(n^2+n-1)}{(n+1)^2}.$$

Par la question 1.b, nous savons que

$$\forall n \geq 1, 2 - a_n \leq 0,$$

tandis que

$$\forall n \geq 1, n^2 + n - 1 \geq 1^2 + 1 - 1 \geq 0.$$

Il s'ensuit que

$$a_{n+1} - a_n \leq 0,$$

et la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ est donc décroissante.

b. D'après les questions 1.b et 2.a, la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ est minorée et décroissante, donc convergente par le théorème des suites monotones.

c. Soit $\ell \in \mathbb{R}$, la limite de la suite $(a_n)_{n\geq 1}$. Comme

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n+2}{(n+1)^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

il découle des opérations élémentaires sur les limites que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n(n+2)}{(n+1)^2} = \ell \times 0 = 0.$$

Sachant que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2(n^2+n-1)}{(n+1)^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n^2}{n^2} = 2,$$

nous déduisons de la définition de la suite récurrente $(a_n)_{n\geq 1}$ et des opérations élémentaires sur les limites que

$$a_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\to} 2.$$

d. Par la question 2.b, la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ est convergente, donc la sous-suite $(a_{n+1})_{n\geq 1}$ est convergente de même limite. La question 2.c assure ainsi que

$$a_n \underset{n\to+\infty}{\to} 2.$$

3. Nous vérifions cette formule par récurrence sur $n \geq 1$. Au rang $n = 1$, nous avons bien

$$\frac{(\alpha-2)(1+1)}{2 \times 1!} + 2 = \alpha = a_1.$$

Supposons donc que

$$\forall 1 \leq p \leq n, a_p = \frac{(\alpha-2)(p+1)}{2p!} + 2.$$

Au rang $n+1$, il découle de l'hypothèse de récurrence et de la formule de la question 1.a que

$$a_{n+1} = 2 + \frac{(n+2)(a_n-2)}{(n+1)^2} = 2 + \frac{(\alpha-2)(n+2)(n+1)}{2n!(n+1)^2} = 2 + \frac{(\alpha-2)(n+2)}{2(n+1)!}.$$

Aussi concluons-nous par récurrence sur $n \geq 1$ que

$$\forall n \geq 1, a_n = \frac{(\alpha-2)(n+1)}{2n!} + 2.$$