Université de Cergy-Pontoise **Polynômes et suites**
Licence 1 MIPI **2018-2019**

Examen

La durée de cet examen est de deux heures. L'usage des calculatrices ainsi que de tout autre appareil électronique est interdit. Les trois exercices sont indépendants.

Questions de cours. *(4 points)*

1. Écrire les formules d'Euler du cosinus et du sinus.

2. Énoncer le théorème de la division euclidienne de deux polynômes.

3. Donner la définition d'une suite réelle convergente.

4. Énoncer le théorème des suites adjacentes.

Exercice 1. *(6 points)*

1. Soit $z = \sqrt{2+\sqrt{3}} + i\sqrt{2-\sqrt{3}}$

a. Déterminer la forme algébrique, puis la forme exponentielle du nombre complexe z^2.

b. En déduire la forme exponentielle du nombre complexe z.

c. Quelles sont les valeurs des nombres réels $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$?

2. Soit $\omega = 1 - \sqrt{2} + i$.

a. Calculer la forme algébrique du nombre complexe ω^2.

b. En déduire la forme algébrique des deux nombres complexes z_1 et z_2 qui sont solutions de l'équation :

$$\sqrt{2}z^2 - (\sqrt{2}+1+i)z + 1 + i = 0.$$

c. En déduire la forme exponentielle des nombres complexes z_1 et z_2.

d. Déterminer les formes exponentielles des racines cubiques des nombres complexes z_1 et z_2.

e. En déduire les formes algébriques de tous les nombres complexes z qui sont solutions de l'équation :

$$\sqrt{2}z^6 - (\sqrt{2}+1+i)z^3 + 1 + i = 0.$$

Exercice 2. *(5 points)*

Soit

$$\forall a \in \mathbb{R}, P_a = X^5 + aX^4 - (a+1)X^3 - (a+1)X^2 + aX + 1.$$

1.a. Montrer que les nombres -1 et 1 sont racines du polynôme P_a.

b. Déterminer les ordres de multiplicité des racines -1 et 1 en fonction du nombre réel a.

2.a. Déterminer le quotient Q_a et le reste R_a de la division euclidienne du polynôme P_a par le polynôme $(X+1)(X-1)^2$.

b. Quelles sont les décompositions en facteurs irréductibles des polynômes P_a pour $a = -3$ et $a = 1$?

Exercice 3. *(5 points)*

Soit $\alpha \in [2, +\infty[$. Considérons la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ définie par

$$a_1 = \alpha \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \frac{(n+2)a_n + 2(n^2+n-1)}{(n+1)^2}.$$

1. a. Vérifier que

$$\forall n \geq 1, a_{n+1} - 2 = \frac{(a_n - 2)(n+2)}{(n+1)^2}$$

b. En déduire que la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ est minorée par 2.

2.a. La suite $(a_n)_{n\geq 1}$ est-elle décroissante ?

b. Montrer que la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ est convergente.

c. En déduire que

$$a_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\to} 2.$$

d. Quelle est la limite de la suite $(a_n)_{n\geq 1}$?

3. Vérifier que

$$\forall n \geq 1, a_n = \frac{(\alpha - 2)(n+1)}{2(n!)} + 2.$$