Corrigé de l'examen de rattrapage

Questions de cours.

1. La fonction exponentielle complexe est définie de la façon suivante :

$$\forall z = x + iy \in \mathbb{C} \text{ (avec } (x, y) \in \mathbb{R}^2), \exp(x + iy) = e^x \big(\cos(y) + i \sin(y) \big).$$

2. Le théorème de Bézout affirme que des polynômes non nuls P_1, ..., et P_N sont premiers entre eux dans leur ensemble si et seulement s'il existe des polynômes U_1, ..., et U_N tels que

$$U_1 P_1 + \ldots + U_N P_N = 1.$$

3. Une suite réelle ou complexe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \forall m \geq N, \forall n \geq N, |u_m - u_n| < \varepsilon.$$

Exercice 1.

1.a. Pour tout nombre $\theta \in \mathbb{R}$, la formule de Moivre conduit à l'expression

$$\cos(4\theta) = \mathrm{Re}\left(e^{i4\theta}\right) = \mathrm{Re}\Big(\big(\cos(\theta) + i \sin(\theta)\big)^4\Big).$$

Comme la formule du binôme de Newton s'écrit

$$\forall (a, b) \in \mathbb{C}^2, \big(a + b\big)^4 = a^4 + 4a^3 b + 6a^2 b^2 + 4ab^3 + b^4,$$

il vient

$$\cos(4\theta) = \mathrm{Re}\,\big(\cos(\theta)^4 + 4i \sin(\theta) \cos(\theta)^3 + 6i^2 \sin(\theta)^2 \cos(\theta)^2 + 4i^3 \sin(\theta)^3 \cos(\theta) + i^4 \sin(\theta)^4\big).$$

Sachant que $i^2 = -1$, $i^3 = -i$ et $i^4 = 1$, nous obtenons

$$\cos(4\theta) = \cos(\theta)^4 - 6\cos(\theta)^2 \sin(\theta)^2 + \sin(\theta)^4.$$

b. Rappelons que

$$\sin(\theta)^2 = 1 - \cos(\theta)^2,$$

de sorte que

$$\sin(\theta)^4 = \big(1 - \cos(\theta)^2\big)^2 = 1 - 2\cos(\theta)^2 + \cos(\theta)^4.$$

Il suffit donc d'introduire ces formules dans l'identité de la question 1.a pour obtenir

$$\cos(4\theta) = \cos(\theta)^4 - 6\cos(\theta)^2 \big(1 - \cos(\theta)^2\big) + 1 - 2\cos(\theta)^2 + \cos(\theta)^4,$$

ce qui équivaut à l'expression

$$\cos(4\theta) = 8\cos(\theta)^4 - 8\cos(\theta)^2 + 1.$$

2.a. Le discriminant de cette équation algébrique du second degré est égal à

$$\Delta = 64 - 32\Big(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\Big) = 32 + 16\sqrt{2} > 0.$$

Cette équation possède donc deux racines réelles égales à

$$X_+ = \frac{1}{16}\Big(8 + \sqrt{32 + 16\sqrt{2}}\Big) = \frac{1}{4}\Big(2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}\Big),$$

et

$$X_- = \frac{1}{16}\Big(8 - \sqrt{32 + 16\sqrt{2}}\Big) = \frac{1}{4}\Big(2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}\Big).$$

b. Comme $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, un nombre x est racine de l'équation algébrique de degré quatre $8x^4 - 8x^2 + 1 = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$ si et seulement x^2 est solution de l'équation du second degré

$$8X^2 - 8X + 1 = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

D'après la question 2.a, nous avons

$$x^2 = \frac{1}{4}\Big(2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}\Big), \quad \text{ou} \quad x^2 = \frac{1}{4}\Big(2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}\Big).$$

Comme $2 > \sqrt{2 + \sqrt{2}}$, les quatre solutions de l'équation $8x^4 - 8x^2 + 1 = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$ sont donc

$$-\frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}, \quad \frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}, \quad -\frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}, \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}.$$

c. La fonction cos est strictement décroissante sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Comme $0 < \frac{\pi}{16} < \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$, il s'ensuit que

$$\cos(0) > \cos\left(\frac{\pi}{16}\right) > \cos\left(\frac{\pi}{4}\right),$$

soit

$$\frac{1}{\sqrt{2}} < \cos\left(\frac{\pi}{16}\right) < 1.$$

d. D'après la question 1.b, nous avons

$$8\cos\left(\frac{\pi}{16}\right)^4 - 8\cos\left(\frac{\pi}{16}\right)^2 + 1 = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right),$$

pour $\theta = \frac{\pi}{16}$. Le nombre $\cos\left(\frac{\pi}{16}\right)$ est donc solution de l'équation algébrique de degré 4

$$8x^4 - 8x^2 + 1 = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right).$$

Par conséquent, il s'agit d'une des quatre solutions de la question 2.b. Comme

$$\frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}} < \frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

il résulte de la question 2.c que ce nombre est égal à

$$\cos\left(\frac{\pi}{16}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}.$$

Il s'ensuit que

$$\sin\left(\frac{\pi}{16}\right)^2 = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{16}\right)^2 = 1 - \frac{1}{4}\Big(2 + \sqrt{2+\sqrt{2}}\Big) = \frac{1}{4}\Big(2 - \sqrt{2+\sqrt{2}}\Big).$$

Puisque $\sin\left(\frac{\pi}{16}\right) > 0$, nous concluons que

$$\sin\left(\frac{\pi}{16}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2+\sqrt{2}}}.$$

Exercice 2.

1. Nous calculons

$$\begin{aligned} P_a(a) =& a^5 - 6a^5 + 2(6a^2+1)a^3 - 2(5a^2+3)a^3 + 3a^3(a^2+2) - 2a^3 \\ =& \big(1 - 6 + 12 - 10 + 3\big)a^5 + \big(2 - 6 + 6 - 2\big)a^3 \\ =& 0, \end{aligned}$$

de sorte que a est bien une racine de P_a.

2.a. Rappelons que la formule du binôme de Newton est valable pour des polynômes P et Q. Elle s'écrit alors

$$\big(P+Q\big)^3 = P^3 + 3P^2Q + 3PQ^2 + Q^3.$$

Pour $P = X$ et $Q = -a$, nous obtenons

$$(X-a)^3 = X^3 - 3aX^2 + 3a^2X - a^3.$$

b. La division euclidienne du polynôme P_a par le polynôme $(X-a)^3$ s'écrit

$$\begin{array}{ccccccccc|c}
X^5 & - & 6aX^4 & + & 2(6a^2+1)X^3 & - & 2a(5a^2+3)X^2 & + & 3a^2(a^2+2)X-2a^3 & X^3-3aX^2+3a^2X-a^3 \\
-(X^5 & - & 3aX^4 & + & 3a^2X^3 & - & a^3X^2) & & & \overline{X^2-3aX+2} \\
\hline
 & - & 3aX^4 & + & (9a^2+2)X^3 & - & (9a^3+6a)X^2 & + & 3a^2(a^2+2)X-2a^3 & \\
 & -(- & 3aX^4 & + & 9a^2X^3 & - & 9a^3X^2 & + & 3a^4X) & \\
\hline
 & & & & 2X^3 & - & 6aX^2 & + & 6a^2X-2a^3 & \\
 & & & & -(2X^3 & - & 6aX^2 & + & 6a^2X-2a^3) & \\
\hline
 & & & & & & & & 0 &
\end{array}$$

Par conséquent, le quotient Q_a et le reste R_a de la division euclidienne de P_a par $(X-a)^3$ sont égaux à

$$Q_a = X^2 - 3aX + 2, \quad \text{et} \quad R_a = 0.$$

c. La question 2.b assure que

$$P_a = (X-a)^3 Q_a,$$

de sorte que le polynôme $(X-a)^3$ divise P_a. Le nombre a est donc une racine d'ordre au moins 3 de P_a. Comme

$$Q_a(a) = a^2 - 3a^2 + 2 = 2(1-a^2) \neq 0,$$

lorsque $a \neq \pm 1$, l'ordre de multiplicité de cette racine est exactement égal à 3.

3.a. Par définition, le polynôme P_1 est égal à

$$P_1 = X^5 - 6X^4 + 14X^3 - 16X^2 + 9X - 2,$$

de sorte que les dérivées successives de ce polynôme sont données par

$$\begin{aligned}
P_1' &= 5X^4 - 24X^3 + 42X^2 - 32X + 9,\\
P_1'' &= 20X^3 - 72X^2 + 84X - 32,\\
P_1''' &= 60X^2 - 144X + 84,
\end{aligned}$$

et

$$P_1^{(4)} = 120X - 144.$$

Outre le fait que $P_1(1) = 0$ par la question 1, nous calculons

$$P_1'(1) = 5-24+42-32+9 = 0, \quad P_1''(1) = 20-72+84-32 = 0, \quad P_1'''(1) = 60-144+84 = 0,$$

et

$$P_1^{(4)}(1) = 120 - 144 = -24 \neq 0.$$

L'ordre de multiplicité de la racine 1 du polynôme P_1 est donc égal à 4.

b. Il découle de la question 3.a que le polynôme $(X-1)^4$ divise le polynôme P_1, de sorte que le reste R_1 de la division euclidienne de P_1 par $(X-1)^4$ vaut

$$R_1 = 0.$$

Quant au quotient Q_1, il satisfait à l'identité

$$P_1 = Q_1(X-1)^4,$$

d'où

$$d^\circ(Q_1) = d^\circ(P_1) - d^\circ\big((X-1)^4\big) = 5 - 4 = 1.$$

Il existe donc deux nombres réels α et β tels que

$$Q_1 = \alpha X + \beta.$$

Nous déduisons de la formule du binôme de Newton que

$$\begin{aligned}
Q_1(X-1)^4 =& (\alpha X + \beta)(X^4 - 4X^3 + 6X^2 - 4X + 1)\\
=& \alpha X^5 + (\beta - 4\alpha)X^4 + (6\alpha - 4\beta)X^3 + (6\beta - 4\alpha)X^2 + (\alpha - 4\beta)X + \beta.
\end{aligned}$$

L'identification des coefficients de ce polynôme et de ceux de P_1 conduit à

$$\alpha = 1, \quad \text{et} \quad \beta = -2,$$

ce qui fournit l'expression

$$Q_1 = X - 2.$$

c. Nous déduisons de la question 3.b que

$$P_1 = (X-2)(X-1)^4,$$

qui est la décomposition en facteurs irréductibles du polynôme P_1, puisqu'elle est uniquement composée de polynômes irréductibles.

Exercice 3.

1. Nous raisonnons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$. Au rang $n = 1$, nous vérifions que

$$u_1 = 1 \leq 1 = \sqrt{1-1} + \sqrt{1}.$$

Supposons que
$$\forall 1 \leq k \leq n, u_k \leq \sqrt{k-1} + \sqrt{k},$$
et considérons le rang $k = n+1$. Nous observons que
$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{\sqrt{n+1}},$$
de sorte que par l'hypothèse de récurrence,
$$u_{n+1} \leq \sqrt{n-1} + \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$
Il nous reste à vérifier que
$$\sqrt{n-1} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq \sqrt{n+1},$$
ce qui équivaut à l'inégalité
$$\sqrt{(n-1)(n+1)} + 1 \leq n+1.$$
Sachant que
$$(n-1)(n+1) = n^2 - 1 \leq n^2,$$
nous obtenons
$$\sqrt{(n-1)(n+1)} \leq \sqrt{n^2} = n,$$
ce qui suffit à établir que
$$\sqrt{(n-1)(n+1)} + 1 \leq n+1,$$
puis que
$$u_{n+1} \leq \sqrt{n} + \sqrt{n+1}.$$
Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$, nous concluons que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \leq \sqrt{n-1} + \sqrt{n}.$$

2.a. Nous calculons
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_{n+1} - v_n = \frac{u_{n+1}}{\sqrt{n+1}} - \frac{u_n}{\sqrt{n}}.$$
Comme
$$u_n = u_{n+1} - \frac{1}{\sqrt{n+1}},$$
il vient
$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_{n+1}}{\sqrt{n+1}} - \frac{u_{n+1}}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}},$$
ce qui s'écrit aussi
$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} - \frac{u_{n+1}}{\sqrt{n(n+1)}}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right).$$

b. Il découle de la question 1 que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq u_{n+1} \leq \sqrt{n} + \sqrt{n+1}.$$

Comme $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\geq 0$, il s'ensuit que

$$\frac{u_{n+1}}{\sqrt{n(n+1)}}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\leq \frac{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}{\sqrt{n(n+1)}}=\frac{n+1-n}{\sqrt{n(n+1)}}=\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}.$$

La formule de la question 2.a conduit alors à l'inégalité

$$v_{n+1}-v_n\geq \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}-\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}=0,$$

qui assure que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

3.a. Il résulte de la question 1 que

$$\forall n\in\mathbb{N}^*, v_n=\frac{u_n}{\sqrt{n}}\leq\frac{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n}}=\sqrt{\frac{n-1}{n}}+1\leq 2.$$

Par conséquent, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée.

b. D'après les questions 2.b et 3.a, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et majorée, donc convergente.

c. D'après la question 3.b, il existe un nombre réel ℓ tel que

$$v_n\underset{n\to+\infty}{\to}\ell.$$

Rappelons que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante, et observons que

$$v_1=1.$$

Il s'ensuit que

$$\ell\geq 1.$$

Comme

$$\sqrt{n}\underset{n\to+\infty}{\to}+\infty,$$

nous aboutissons à

$$u_n=v_n\sqrt{n}\underset{n\to+\infty}{\to}+\infty.$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc divergente de limite $+\infty$.