Université de Cergy-Pontoise **Polynômes et suites**
Licence 1 MIPI **2017-2018**

Examen de rattrapage

La durée de cet examen est de deux heures. L'usage des calculatrices ainsi que de tout autre appareil électronique est interdit. Les trois exercices sont indépendants.

Questions de cours. *(3 points)*

1. Donner la définition de la fonction exponentielle complexe.

2. Énoncer le théorème de Bézout pour les polynômes premiers entre eux dans leur ensemble.

3. Donner la définition d'une suite de Cauchy.

Exercice 1. *(6 points)*

1.a. Montrer que

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \cos(4\theta) = \cos^4(\theta) - 6\cos^2(\theta)\sin^2(\theta) + \sin^4(\theta).$$

b. En déduire que

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \cos(4\theta) = 8\cos^4(\theta) - 8\cos^2(\theta) + 1.$$

2.a. Déterminer les solutions X de l'équation algébrique du second degré

$$8X^2 - 8X + 1 = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

b. En déduire les solutions x de l'équation algébrique de degré quatre

$$8x^4 - 8x^2 + 1 = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right).$$

c. Vérifier que

$$\frac{1}{\sqrt{2}} < \cos\left(\frac{\pi}{16}\right) < 1.$$

d. En déduire la valeur des nombres réels $\cos\left(\frac{\pi}{16}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{16}\right)$.

Exercice 2. *(6 points)*

Soit

$$\forall a \in \mathbb{C}, P_a = X^5 - 6aX^4 + 2(6a^2+1)X^3 - 2a(5a^2+3)X^2 + 3a^2(a^2+2)X - 2a^3.$$

1. Montrer que le nombre complexe a est une racine du polynôme P_a.

2. Nous supposons dans cette question que $a \neq \pm 1$.

a. Vérifier que

$$(X-a)^3 = X^3 - 3aX^2 + 3a^2X - a^3.$$

b. En déduire le quotient Q_a et le reste R_a de la division euclidienne de P_a par $(X-a)^3$.

c. Quel est l'ordre de multiplicité de la racine a du polynôme P_a ?

3. Nous supposons dans cette question que $a = 1$.

a. Quel est l'ordre de multiplicité de la racine 1 du polynôme P_1 ?

b. En déduire le quotient Q_1 et le reste R_1 de la division euclidienne de P_1 par $(X-1)^4$.

c. Écrire la décomposition en facteurs irréductibles du polynôme P_1.

Exercice 3. *(5 points)*

Soit
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n-1}} + \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

1. Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \leq \sqrt{n-1} + \sqrt{n}.$$

2. Soit
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \frac{u_n}{\sqrt{n}}.$$

a. Vérifier que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_{n+1} - v_n = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} - \frac{u_{n+1}}{\sqrt{n(n+1)}}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right).$$

b. En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

3.a. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée.

b. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est-elle convergente ?

c. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ a-t-elle une limite ? Si oui, laquelle ?