Université de Cergy-Pontoise **Polynômes et suites**
Licence 1 MIPI **2017-2018**

Corrigé de l'examen

Questions de cours.

1. L'inégalité triangulaire pour le module des nombres complexes s'énonce ainsi :

$$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, |z + z'| \leq |z| + |z'|.$$

2. Le théorème de d'Alembert-Gauss pour les polynômes complexes affirme que tout polynôme complexe non constant possède au moins une racine.

3. Le théorème de Bolzano-Weierstrass affirme que toute suite réelle ou complexe bornée possède une sous-suite convergente.

Exercice 1.

1.(i) Comme le nombre $z_1 = i$ est non nul, il possède deux racines carrées que nous pouvons noter ω_1 et $-\omega_1$. Si nous posons $\omega_1 = x + iy$, nous savons que

$$i = \omega_1^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy,$$

de sorte que

$$x^2 - y^2 = 0, \quad \text{et} \quad 2xy = 1.$$

Le module de l'égalité précédente conduit à la troisième identité

$$1 = |i| = |\omega_1^2| = |\omega_1|^2 = x^2 + y^2.$$

Nous obtenons donc

$$x^2 = y^2 = \frac{1}{2},$$

soit

$$x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \text{et} \quad y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

La formule $2xy = 1$ assure que les nombres x et y sont de même signe, et nous concluons que les deux racines carrées du nombre i sont

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}, \quad \text{et} \quad -\omega_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}.$$

(ii) Le nombre $z_2 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$ n'est pas nul, donc il possède deux racines carrées ω_2 et $-\omega_2$. Si nous notons $\omega_2 = x + iy$, nous obtenons à nouveau

$$\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} = x^2 - y^2 + 2ixy,$$

ainsi que

$$1 = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} \right| = x^2 + y^2.$$

Nous déduisons de ces identités que

$$x^2 - y^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \text{et} \quad 2xy = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

puis que

$$2x^2 = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \text{et} \quad 2y^2 = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Comme $2xy = \frac{1}{\sqrt{2}}$, les nombres x et y sont de même signe, donc les deux racines carrées du nombre $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ sont égales à

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}}, \quad \text{et} \quad -\omega_2 = -\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}}.$$

(iii) Nous observons que

$$z_3 = -z_2,$$

de sorte que ω_3 est une racine carrée de z_3 si et seulement si

$$z_2 = -z_3 = -\omega_3^2 = (i\omega_3)^2,$$

c'est-à-dire si et seulement si $i\omega_3$ est une racine carrée de z_2. Il s'ensuit que

$$i\omega_3 = \pm\omega_2,$$

où ω_2 est la racine carrée du nombre z_2 calculée à la question 1.(ii). Comme $\frac{1}{i} = -i$, nous concluons que les deux racines carrées du nombre complexe z_3 sont

$$\omega_3 = \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}}, \quad \text{et} \quad -\omega_3 = -\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}}.$$

2.a. Le nombre complexe ω est une racines quatrième du nombre complexe i si et seulement si

$$i = \omega^4 = \big(\omega^2\big)^2,$$

c'est-à-dire si et seulement si ω^2 est une racine carrée de i.

b. D'après la question 2.a, un nombre ω est une racine quatrième de du nombre complexe i si et seulement si ω^2 est une racine carrée de i. D'après la question 1.(i), nous savons donc que

$$\omega^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} = z_2, \quad \text{ou} \quad \omega^2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}} = z_3.$$

D'après les questions 1.(ii) et 1.(iii), les quatre racines quatrièmes du nombre complexe i sont par conséquent égales à

$$\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}}, \quad -\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}},$$

et

$$\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}}, \quad -\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}}.$$

3.a. Comme $|i| = 1$ et $\arg(i) = \frac{\pi}{2} \bmod 2\pi$, la forme exponentielle du nombre i est donnée par

$$i = e^{\frac{i\pi}{2}}.$$

b. D'après la question 3.a, la forme exponentielle des racines quatrièmes du nombre i est donnée par les formules

$$e^{\frac{i\pi}{8}}, \quad e^{\frac{i\pi}{8}+\frac{i\pi}{2}}, \quad e^{\frac{i\pi}{8}+i\pi}, \quad \text{et} \quad e^{\frac{i\pi}{8}+\frac{3i\pi}{2}},$$

c'est-à-dire

$$e^{\frac{i\pi}{8}}, \quad e^{\frac{5i\pi}{8}}, \quad e^{\frac{9i\pi}{8}}, \quad \text{et} \quad e^{\frac{13i\pi}{8}}.$$

4. Comme $0 < \frac{\pi}{8} < \frac{\pi}{2}$, nous savons que

$$\cos\Big(\frac{\pi}{8}\Big) > 0, \quad \text{et} \quad \sin\Big(\frac{\pi}{8}\Big) > 0,$$

ce qui équivaut au fait que

$$\mathrm{Re}(e^{\frac{i\pi}{8}}) > 0, \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(e^{\frac{i\pi}{8}}) > 0.$$

Par définition, les quatre solutions de la question 2.b sont égales aux quatre solutions de la question 3.b, donc nous déduisons des inégalités précédentes que

$$e^{\frac{i\pi}{8}} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}},$$

ce qui conduit aux formules

$$\cos\Big(\frac{\pi}{8}\Big) = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}}, \quad \text{et} \quad \sin\Big(\frac{\pi}{8}\Big) = \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}}.$$

Exercice 2.

1. La division euclidienne du polynôme P_1 par le polynôme P_2 s'écrit

$$\begin{array}{rrrrrrrrrrrrrrr|l}
 & X^6 & + & X^5 & + & 3X^4 & + & 2X^3 & + & 3X^2 & + & X & + & 1 & & X^4+X^3-X-1 \\ \cline{16-16}
- & (X^6 & + & X^5 & & & - & X^3 & - & X^2) & & & & & & X^2+3 \\ \cline{2-15}
 & & & & & 3X^4 & + & 3X^3 & + & 4X^2 & + & X & + & 1 & & \\
 & & & & - & (3X^4 & + & 3X^3 & & & - & 3X & - & 3) & & \\ \cline{5-15}
 & & & & & & & & & 4X^2 & + & 4X & + & 4 & &
\end{array}$$

Le quotient Q et le reste R de cette division euclidienne sont donc égaux à

$$Q = X^2 + 3, \quad \text{et} \quad R = 4X^2 + 4X + 4.$$

2. Poursuivons l'algorithme d'Euclide débuté à la question 1. La division euclidienne du polynôme P_2 par le polynôme R s'écrit

$$\begin{array}{rrrrrrrrrrr|l}
 & X^4 & + & X^3 & & & - & X & - & 1 & & 4X^2+4X+4 \\ \cline{12-12}
- & (X^4 & + & X^3 & + & X^2) & & & & & & \frac{1}{4}\Big(X^2-1\Big) \\ \cline{2-11}
 & & & & - & X^2 & - & X & - & 1 & & \\
 & & & - & (- & X^2 & - & X & - & 1) & & \\ \cline{5-11}
 & & & & & & & & & 0 & &
\end{array}$$

Le dernier reste non nul dans l'algorithme d'Euclide est donc égal à $R = 4X^2 + 4X + 4$, et le PGCD des polynômes P_1 et P_2 vaut par conséquent

$$\mathrm{PGCD}(P_1, P_2) = X^2 + X + 1.$$

3. Revenons à la question 1. La division euclidienne du polynôme P_1 par le polynôme P_2 s'écrit aussi

$$P_1 = QP_2 + R,$$

ce qui revient à l'identité

$$P_1 = \big(X^2 + 3\big)P_2 + 4\big(X^2 + X + 1\big),$$

d'où il découle que

$$X^2 + X + 1 = \frac{1}{4}P_1 - \frac{1}{4}\big(X^2 + 3\big)P_2.$$

Les polynômes

$$U = \frac{1}{4}, \quad \text{et} \quad V = -\frac{1}{4}\big(X^2 + 3\big),$$

satisfont donc l'identité

$$UP_1 + VP_2 = X^2 + X + 1.$$

Exercice 3.

1.a. Le nombre 1 est une racine du polynôme $aX^{N+1} + bX^N + 1$ si et seulement si

$$a1^{N+1} + b1^N + 1 = 0.$$

La condition nécessaire et suffisante recherchée est donc

$$a + b + 1 = 0.$$

b. Soit $P = aX^{N+1} + bX^N + 1$. Si le nombre 1 est une racine double du polynôme P, alors il est déjà racine de P, de sorte que par la question 1.a,

$$a + b + 1 = 0.$$

De plus, le nombre 1 est aussi racine de

$$P' = (N + 1)aX^N + NbX^{N-1}.$$

Par conséquent, les nombres a et b satisfont aussi

$$(N + 1)a + Nb = 0.$$

Il découle de ces deux équations que

$$b = -1 - a,$$

puis que

$$(N + 1)a - N - Na = 0.$$

Il vient ainsi

$$a = N, \quad \text{puis} \quad b = -1 - N.$$

Réciproquement, si $a = N$ et $b = -N-1$, alors,

$$P(1) = N1^{N+1} - (N+1)1^N + 1 = 0, \quad \text{et} \quad P'(1) = N(N+1)1^N - N(N+1)1^{N-1} = 0.$$

Enfin, nous avons

$$P'' = \begin{cases} N^2(N+1)X^{N-1} - N(N-1)(N+1)X^{N-2}, \text{ si } N \geq 2, \\ N^2(N+1), \text{ si } N = 1, \end{cases}$$

ce qui implique que

$$P''(1) = \begin{cases} N^2(N+1) - N(N-1)(N+1) = N(N+1) \neq 0, \text{ si } N \geq 2, \\ N^2(N+1) = 2 \neq 0, \text{ si } N = 1. \end{cases}$$

Le nombre 1 est donc une racine double de P, ce qui achève la preuve de l'équivalence.

2.a. Nous calculons

$$\begin{aligned} P_{N+1} - P_N =& (N+1)X^{N+2} - (N+2)X^{N+1} + 1 - NX^{N+1} + (N+1)X^N - 1 \\ =& (N+1)X^{N+2} - 2(N+1)X^{N+1} + (N+1)X^N \\ =& (N+1)X^N\big(X^2 - 2X + 1\big) \\ =& (N+1)X^N\big(X-1\big)^2. \end{aligned}$$

b. Nous déduisons de la question 2.a que

$$\forall 2 \leq k \leq N, P_k - P_{k-1} = kX^{k-1}(X-1)^2.$$

Nous pouvons sommer ces identités afin d'obtenir

$$\sum_{k=2}^{N} \big(P_k - P_{k-1}\big) = \sum_{k=2}^{N} kX^{k-1}(X-1)^2 = (X-1)^2 \sum_{k=2}^{N} kX^{k-1}.$$

Nous observons que

$$\sum_{k=2}^{N} \big(P_k - P_{k-1}\big) = P_N - P_{N-1} + P_{N-1} - \ldots - P_2 + P_2 - P_1 = P_N - P_1,$$

d'où la formule

$$P_N = P_1 + (X-1)^2 \sum_{k=2}^{N} kX^{k-1}.$$

Comme $P_1 = X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2$, il vient

$$P_N = (X-1)^2\left(1 + \sum_{k=2}^{N} kX^{k-1}\right) = (X-1)^2 \sum_{k=1}^{N} kX^{k-1}.$$

Exercice 4.

1.a Comme a est strictement positif, le nombre $a + x$ est strictement positif lorsque x est positif. La fonction f_a est donc bien définie sur $\mathbb{R}_+$ et à valeurs strictement positives.

Sachant que la fonction racine carrée est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$, la fonction f_a est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$, et sa dérivée vérifie

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, f_a'(x) = \frac{1}{2\sqrt{a+x}} > 0.$$

Aussi la fonction f_a est-elle strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

b. D'après la question 1.a, la fonction f_a est bien définie de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$. Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, et puisque $u_0 = 0$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc bien définie et à valeurs positives. En ce qui concerne sa stricte croissance, nous raisonnons aussi par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. Nous observons que

$$u_1 - u_0 = \sqrt{a} - 0 > 0.$$

Supposons alors que

$$\forall 0 \leq k \leq n, u_{k+1} - u_k > 0,$$

et étudions le cas $k = n+1$. Les nombres u_n et u_{n+1} sont positifs, et satisfont par l'hypothèse de récurrence

$$u_n < u_{n+1}.$$

D'après la question 1.a, la fonction f_a est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, ce qui assure que

$$u_{n+1} = f_a(u_n) < f_a(u_{n+1}) = u_{n+2}.$$

Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$, nous concluons que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n < u_{n+1},$$

de sorte que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

2.a. Il s'agit de résoudre l'équation

$$x = f_a(x) = \sqrt{a+x},$$

pour $x \in \mathbb{R}_+$, puisque ce nombre est la racine carrée positive du nombre $a+x$. Nous avons

$$x^2 - x - a = 0,$$

et le discriminant de cette équation algébrique du second degré est égal à

$$\Delta = 1 + 4a > 0.$$

Cette équation possède donc deux solutions

$$x_+ = \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}, \quad \text{et} \quad x_- = \frac{1-\sqrt{1+4a}}{2}.$$

Comme $x_- < 0$, le seul point fixe possible est x_+, et nous vérifions que

$$f_a(x_+) = \sqrt{a+x_+} = \sqrt{\left(x_+\right)^2} = x_+.$$

L'unique point fixe de la fonction f_a est donc

$$x_+ = \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}.$$

b. Nous raisonnons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. Au rang $n = 0$, nous vérifions que

$$u_0 = 0 \leq \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}.$$

Supposons que

$$\forall 0 \leq k \leq n, u_k \leq \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2},$$

et étudions le cas $k = n + 1$. Par la question 1.b, et l'hypothèse de récurrence, nous savons que

$$0 \leq u_n \leq \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}.$$

Comme la fonction f_a est croissante sur $\mathbb{R}_+$ par la question 1.a, il vient

$$u_{n+1} = f_a(u_n) \leq f_a\Big(\frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}\Big),$$

ce qui équivaut au fait que

$$u_{n+1} \leq \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2},$$

puisque $\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$ est un point fixe de f_a. Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, nous arrivons à

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}.$$

c. D'après les questions 1.b et 2.b, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et majorée, donc convergente. Comme la fonction f_a est continue, sa limite est un point fixe de cette fonction, et par unicité de ce point fixe, nous concluons que

$$u_n \underset{n \to +\infty}{\to} \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}.$$