Université de Cergy-Pontoise **Polynômes et suites**
Licence 1 MIPI **2017-2018**

Examen

La durée de cet examen est de deux heures. L'usage des calculatrices ainsi que de tout autre appareil électronique est interdit. Les quatre exercices sont indépendants.

Questions de cours. *(3 points)*

1. Énoncer l'inégalité triangulaire pour le module des nombres complexes.

2. Énoncer le théorème de d'Alembert-Gauss pour les polynômes complexes.

3. Énoncer le théorème de Bolzano-Weierstrass.

Exercice 1. *(5 points)*

1. Déterminer la forme algébrique des racines carrées des nombres complexes suivants :

$$\text{(i) } z_1 = i, \qquad \text{(ii) } z_2 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}, \qquad \text{(iii) } z_3 = -\frac{1+i}{\sqrt{2}}.$$

2.a. Montrer que le nombre complexe ω est une racine quatrième du nombre complexe i si et seulement si ω^2 est une racine carrée du nombre complexe i.

b. En déduire la forme algébrique des racines quatrièmes du nombre complexe i.

3.a. Quelle est la forme exponentielle du nombre complexe i ?

b. Quelle est la forme exponentielle des racines quatrièmes du nombre complexe i ?

4. En déduire la valeur des nombres réels $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

Exercice 2. *(3 points)*

1. Déterminer le quotient Q et le reste R de la division euclidienne du polynôme $P_1 = X^6 + X^5 + 3X^4 + 2X^3 + 3X^2 + X + 1$ par le polynôme $P_2 = X^4 + X^3 - X - 1$.

2. Déterminer le PGCD des polynômes P_1 et P_2.

3. En déduire des polynômes U et V tels que

$$UP_1 + VP_2 = X^2 + X + 1.$$

Exercice 3. *(4 points)*

1. Soit $N \geq 1$.

a. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur les nombres réels a et b pour que le nombre 1 soit une racine du polynôme $aX^{N+1} + bX^N + 1$?

b. Montrer que le nombre 1 est une racine double du polynôme $aX^{N+1} + bX^N + 1$ si et seulement si

$$a = N \quad \text{et} \quad b = -N - 1.$$

2. Soit

$$\forall N \geq 1, P_N = NX^{N+1} - (N+1)X^N + 1.$$

a. Montrer que

$$\forall N \geq 1, P_{N+1} - P_N = (N+1)X^N(X-1)^2.$$

b. En déduire que

$$\forall N \geq 1, P_N = (X-1)^2 \sum_{k=1}^{N} kX^{k-1}.$$

Exercice 4. *(5 points)*

Soit $a \in]0, +\infty[$. Considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la formule de récurrence

$$u_0 = 0, \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n + a}.$$

1. Soit

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, f_a(x) = \sqrt{a+x}.$$

a. Montrer que la fonction f_a est bien définie, à valeurs strictement positives et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

b. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et strictement croissante.

2.a. Déterminer les points fixes de la fonction f_a.

b. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}.$$

c. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ? Si oui, quelle est sa limite ?