L1 MIPI - SESSION 1 - 16.05.2017

Examen de Polynômes et Suites

Durée: 3h. Aucun document ni calculatrice autorisé. Téléphones portables INTERDITS.
Toute réponse non justifiée sera considéré comme fausse.
Les questions marquées d'une étoile " $\star$ " et signalées en marge par "►" **sont hors barème.**

Questions et applications du cours.

1) Soit $(u_n)_n$ une suite de nombres réels. Rappeler la **définition** de $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

2) Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant votre réponse.

a) i est la seule racine purement complexe (i.e. de $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$) du polynôme $P = 2X^4 + X^3 + 5X^2 + X + 3$.

b) Parmi les points du plan complexe dont les affixes sont les racines quatrièmes de -1, deux de ces points sont sur le cercle unité et les deux autres sont sur la première bissectrice (i.e. sur le graphe de la fonction identité).

c) Toutes les suites extraites d'une suite qui n'a pas de limite, n'ont pas de limite.

d) Si la suite u est décroissante et $1 < u_n$ pour tout n alors on peut en extraire une suite convergente qui tend vers 1 lorsque $n \to \infty$.

► **e)*** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les racines du polynôme $P_n = X^n + X^{n-1} + \ldots + X^2 + X + 1$ sont affixes de points situés dans le plan complexe à égale distance de l'origine.

► **f)*** Les racines du polynôme $X^4 + i$ sont affixes de points situés dans le plan complexe deux à deux sur deux droites perpendiculaires.

► **g)*** Il existe une suite u strictement décroissante telle que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ on ait $1 - \frac{1}{n} < u_n \leq 1$.

Exercice 1. Mettre le nombre $Z = 1 - i$ sous forme exponentielle puis déterminer ses racines cubiques.

Exercice 2. Calculer (en justifiant les étapes si nécessaire) les limites des suites de terme général:

a) $u_n = \dfrac{2n}{\sqrt{n}(1+\sqrt{n}\ln(n))}$ et **b)** $v_n = \dfrac{\sqrt{n^3+n^2+2} - \sqrt{n^3+2n+1}}{\sqrt{n+\sin(n)}}$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.

[Indication pour v: multiplication du numérateur par l'expression conjuguée]

Exercice 3. Soit $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de terme général $s_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k$.

1) Montrer que $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie une relation de récurrence $s_{n+1} = f(s_n)$ avec $f(x) = 1 - x$.

2) Montrer que si la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ était convergente vers $l \in \mathbb{R}$, on aurait $l = f(l)$ (point fixe).

3) Trouver l'ensemble des points fixes de f.

4.a) Calculer les premiers 4 termes de $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$: s_0, s_1, s_2, s_3.

4.b) Dessiner la toile d'araignée pour $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (en précisant par des flèches sur chaque segment de la toile le sens de son développement). Commentez-la: la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ semble-t-elle être convergente ?

4.c) Montrer que $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas convergente.

Soit à présent la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour chaque $n \in \mathbb{N}$ par $c_n = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} s_k$ (nommée "moyenne de Césarò" de $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$).

5.a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $c_{2n-1} = \dfrac{1}{2}$ et $c_{2n} = \dfrac{n+1}{2n+1}$.

5.b) En déduire la valeur de $\lim_{n\to\infty} c_n$ après avoir justifié son existence.

TSVP —->

Exercice 4. Soit u la suite définie pour $n \geq 1$ par $u_n = \dfrac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2n)}$.

1) Écrire l'expression de u_{n+1} et montrer que la suite u vérifie la relation de récurrence $2(n+1)u_{n+1} = (2n+1)u_n$.

2) En déduire que la suite u est monotone et préciser la nature de sa monotonie.

3) Montrer que u est bornée et préciser des bornes.

4) La suite u est-elle convergente? Justifiez.

5.a) Montrer que pour tout $n \geq 1$ on a $0 \leq u_n \leq \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$. [Indication: récurrence]

5.b) En déduire la valeur de la limite $\lim_{n\to\infty} u_n$.

► **6.a)*** Montrer que u_n peut être mis sous la forme: $u_n = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$.

► **6.b)*** Supposons connue la formule d'approximation de Stirling: $n! = \sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{\mathrm{e}}\right)^n (1+\varepsilon_n)$ où $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite qui vérifie: $n\varepsilon_n \to$ constante $\neq 0$ quand $n \to \infty$ (on note ε_n par $O\left(\frac{1}{n}\right)$ dans ce cas).
En déduire alors que $\sqrt{n}\, u_n \to \lambda \neq 0$ quand $n \to \infty$. Préciser la valeur de λ.

Exercice 5. Le but de cet exercice est de trouver les polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ tels que :

$$\text{(HYP)} \qquad P+1 \text{ est divisible par } (X-1)^3 \text{ et } P+2 \text{ est divisible par } X^4.$$

a) Justifier l'existence de deux polynômes Q_1 et Q_2 tels que $P+1 = (X-1)^3 \cdot Q_1$ et $P+2 = X^4 \cdot Q_2$.

b) En déduire que P', le polynôme dérivé de P, admet 1 et 0 comme racines, et préciser pour chacune leur multiplicité (minimale) dans P'. [Indication: dérivation des identités de la question précédente]

c) En déduire que le degré de P est nécessairement supérieur ou égal 6.

d) Trouver un polynôme P_0 qui vérifie (HYP) et qui est exactement de degré 6.
[Indication: si par P_0' on note son polynôme dérivé, en utilisant la question b) on pourrait partir d'une expression a priori de P_0' et l'intégrer]

► **e)*** Montrer que les solutions sont exactement tous les polynômes P qui peuvent s'écrire sous la forme :

$$P = P_0 + (X-1)^3 \cdot X^4 \cdot Q$$

où Q est un polynôme quelconque de $\mathbb{R}[X]$.
[Indication : on pourrait regarder le polynôme $D = P - P_0$]