L1 - MIPI - SESSION 1   2016-2017   (16.05.2017)

CORRIGÉ de l'EXAMEN de "POLYNÔMES & SUITES"

NOTE : La correction des questions hors barème (bonus) sera faite à la fin de ce Corrigé.

QUESTIONS & APPLICATIONS du COURS :

① $u_n \xrightarrow{n\to\infty} +\infty \iff (\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow u_n \geq A)$

② ⓐ FAUX : P a des coefficients réels ($P \in \mathbb{R}[X]$) donc si i est racine de P, nécessairement $\bar{i}$ est aussi racine donc i n'est pas la seule racine $\in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ de P.

ⓑ VRAI : L'équation $z^4 = -1 \Rightarrow |z|^4 = 1$ donc toutes les racines sont sur le cercle unité dans $\mathbb{C}$; aussi, ces racines sont (sachant que $-1 = e^{i\pi}$) :

$$z_k = e^{i\left(\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}\right)}, \quad k = 0,1,2,3$$

donc $z_0 = e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $z_2 = e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\pi\right)} = -e^{i\frac{\pi}{4}}$ sont affixes de points se trouvant sur la 1ère bissectrice dans le plan complexe.

ⓒ FAUX : Si $u_n = (-1)^n$, la suite u n'a pas de limite alors que $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux de ses sous-suites, qui sont constantes $= 1$ et $= -1$ respectivement, donc convergentes.

ⓓ FAUX : $u_n = 2 + \frac{1}{n} > 1$ est décroissante et converge a 2 donc toute sous-suite de u convergera à $2 > 1$.

EXERCICE 1 : $|Z| = |1-i| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

donc $Z = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{4}}$. Alors les solutions de $z^3 = Z = \sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{4}}$ sont :

$$z_k = 2^{1/6} e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{3} + \frac{2k\pi}{3}\right)} = 2^{1/6} e^{i\left(-\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}\right)}, \quad k = 0,1,2,3$$

$z_0 = \sqrt[6]{2}\, e^{-i\frac{\pi}{12}}$; $z_1 = \sqrt[6]{2}\, e^{i\frac{7\pi}{12}}$; $z_3 = \sqrt[6]{2}\, e^{i\frac{15\pi}{12}} = \sqrt[6]{2}\, e^{-i\frac{3\pi}{4}}$

Obs : • les solutions sont des affixes de points du plan complexe situés tous sur le cercle de centre $O \in \mathbb{C}$ et de rayon $\sqrt{2}$; ce sont les sommets d'un triangle équilatéral inscrit dans ce cercle.

• les racines ne sont pas complexes conjuguées car l'éq. est à coeff. complexes.

EXERCICE 2 :

ⓐ $$u_n = \frac{2\cancel{x}}{\cancel{\sqrt{n}}\cdot\cancel{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \ln(n)\right)} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{2}{0+\infty} = 0$$

ⓑ $$v_n = \frac{1}{\sqrt{n+\sin(n)}} \cdot \frac{(\cancel{n^3} + n^2 + 2) - (\cancel{n^3} + 2n + 1)}{\sqrt{n^3+n^2+2} + \sqrt{n^3+2n+1}} =$$

$$= \frac{n^2\left(1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right)}{\cancel{\sqrt{n}}\cdot\sqrt{1+\frac{\sin(n)}{n}}\cdot\cancel{\sqrt{n^3}}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{2}{n^3}} + \sqrt{1+\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^3}}\right)}$$

Or $\left|\frac{\sin(n)}{n}\right| = \frac{|\sin(n)|}{n} \leq \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ donc

$$v_n \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1-0+0}{\sqrt{1+0}\cdot\left(\sqrt{1+0+0} + \sqrt{1+0+0}\right)} = \frac{1}{2}$$

EXERCICE 3 : $s_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k$. Obs : $s_0 = 1$.

1) $s_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k = 1 + \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k \underset{\boxed{j=k-1}}{=}$

$= 1 + \sum_{j=0}^{n} (-1)^{j+1} = 1 - \sum_{j=0}^{n} (-1)^j = 1 - s_n$

Donc $\forall n$: $s_{n+1} = 1 - s_n$ et si $f(x) = 1 - x$

alors $s_{n+1} = f(s_n)$.

<u>Variante de preuve</u> : L'énoncé dit qu'il suffit de m.q. $s_{n+1} + s_n = 1$ $\forall n$. En effet, ceci ~~est dû au~~ fait (à montrer par récurrence) que

$s_{2n+1} = 0$ et $s_{2n} = 1$ (car pour le premier la somme contient un nombre pair de termes, sachant qu'on commence par $k=0$, et pour le deuxième elle contient un nb. impair de termes, le dernier étant tjs $(-1)^{2n} = 1$) !

2) Supposons qu'il existe $l \in \mathbb{R}$ t.q. $s_n \xrightarrow{n \to \infty} l$.

Alors de $s_{n+1} = f(s_n)$, en utilisant la <u>continuité</u> de $x \mapsto f(x) = 1 - x$, on déduit, par passage à la limite $\lim_{n\to\infty}$:

$l = \lim_{n\to\infty} s_{n+1} = \lim_{n\to\infty} f(s_n) = f(\lim_{n\to\infty} s_n) = f(l)$

Donc <u>si</u> la limite de $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existe, elle est nécessairement un pt. fixe de f.

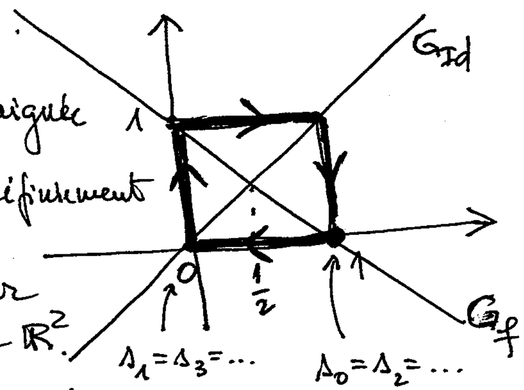
3) On doit résoudre $x = f(x) \iff x = 1 - x$

$\iff x = \frac{1}{2}$ (unique solution).

Donc, d'après 2), si $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeait, sa limite serait nécessairement $1/2$.

4.a) $s_0 = 1$; $s_1 = 0$; $s_2 = 1$; $s_3 = 0$.

4.b) La toile d'araignée est un carré parcouru indéfiniment sans qu'il se resserre autour d'un point de $\mathbb{R}^2$.



Le fait qu'il s'agit d'une figure bornée montre que (s_n) est bornée, mais elle n'a pas de limite apparement car si c'était le cas, on constaterait un resserrage autour du pt $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \in \mathbb{R}^2$.

4.c) On montre par récurrence que (s_n) contient deux sous-suites convergentes vers des limites différentes, d'où : (s_n) n'a pas de limite. En effet : $\forall n \in \mathbb{N}$:

$s_{2n} = 1$ (car $s_0 = 1$ et $s_{2(n+1)} = s_{2n} - 1 + 1 = s_{2n}$)

$s_{2n+1} = 0$ (car $s_1 = 0$ et $s_{2n+1} = s_{2n-1} + 1 - 1 = s_{2n-1}$)

donc $s_{2n} \to 1 \neq 0 = \lim_{n\to\infty} s_{2n+1}$.

5.a A nouveau, on montre **soit directement** :

Si $m \in 2\mathbb{N}+1$: $\left(c_1 = \frac{1}{1+1}(s_0+s_1) = \frac{1}{2}(1+0) = \frac{1}{2} \right)$

$$c_{2n+1} = \frac{1}{2(n+1)} \sum_{k=0}^{2n+1} s_k = \frac{1}{2(n+1)} \sum_{j=0}^{n} (s_j + s_{j+1}) = $$

$$\overset{(4.b)}{=} \frac{1}{2(n+1)} \sum_{j=0}^{n} (1+0) = \frac{1}{2(n+1)} \cdot (n+1) = \frac{1}{2}$$

Si $m \in 2\mathbb{N}^*$: $\left(c_2 = \frac{1}{2+1}(s_0+s_1+s_2) = \frac{1}{3}(1+0+1) = \frac{2}{3} \right)$

$$c_{2n} = \frac{1}{2n+1} \sum_{k=0}^{2n} s_k = \frac{1}{2n+1} \left(\sum_{k=0}^{2n-1} s_k + s_{2n} \right) =$$

$$= \frac{1}{2n+1} \left(\sum_{j=0}^{n-1} (s_j + s_{j+1}) + s_{2n} \right) = \frac{1}{2n+1} (n+1)$$

... **soit par récurrence** : On a vu : $c_1 = \frac{1}{2}$; $c_2 = \frac{2}{3} = \frac{1+1}{2\cdot 1+1}$

Si $c_{2n-1} = \frac{1}{2}$ alors $c_{2n+1} = \frac{1}{2(n+1)} \sum_{k=0}^{2n+1} s_k =$

$$= \frac{1}{2(n+1)} \left(\underbrace{\left(\sum_{k=0}^{2n-1} s_k \right) \cdot \frac{1}{2n}}_{\text{Hyp. récurr.} \to = \frac{1}{2}} \cdot 2n + s_{2n} + s_{2n+1} \right)$$

$$\overset{(4.c)}{=} \frac{1}{2(n+1)} \left(\frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2}n + 1 + 0 \right) = \frac{1}{2\cancel{(n+1)}} \cdot \cancel{(n+1)} = \frac{1}{2}$$

Si $c_{2n} = \frac{n+1}{2n+1}$ (hyp. réc.) alors :

$$c_{2(n+1)} = \frac{1}{2n+3} \sum_{k=0}^{2(n+1)} s_k = \frac{1}{2n+3} \left(\left(\sum_{k=0}^{2n} s_k \right) \frac{2n+1}{2n+1} + s_{2n+1} + s_{2(n+1)} \right)$$

$$\overset{\text{Hyp. récurr.}}{=} \frac{1}{2n+3} \left(\frac{n+1}{\cancel{2n+1}} \cdot \cancel{(2n+1)} + 0 + 1 \right) = \frac{n+2}{2n+3} = \frac{(n+1)+1}{2(n+1)+1}$$

5.b On a : (*) $\mathbb{N}^* = 2\mathbb{N}^* \sqcup (2\mathbb{N}+1)$ (réunion disjointe)

Aussi, par (5.a) : $\lim_{n\to\infty} c_{2n+1} = \frac{1}{2} = \lim_{n\to\infty} c_{2n}$,

la sous-suite $(c_{2n-1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ étant même constante $= \frac{1}{2}$

On a donc :

$\forall \varepsilon > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}^*$, $|c_{2n-1} - \frac{1}{2}| = 0 < \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ t.q. $n \geq N_\varepsilon \Rightarrow |c_{2n} - \frac{1}{2}| < \varepsilon$

Alors par (*) ci-dessus

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon = 2N_\varepsilon$ t.q. $n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |c_n - \frac{1}{2}| < \varepsilon$

i.e. $c_n \to \frac{1}{2}$ quand $n \to \infty$.

(Obs : cette situation a déjà fait l'objet de l'Exo34 du Poly de TD)

EXERCICE 4 :

(1) $$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\cancel{1}\cdot\cancel{3}\cdot\ldots\cdot\cancel{(2n-1)}(2n+1)}{\cancel{2}\cdot\cancel{4}\cdot\ldots\cdot\cancel{(2n)}(2(n+1))} \cdot \frac{\cancel{2}\cdot\cancel{4}\cdot\ldots\cdot\cancel{(2n)}}{\cancel{1}\cdot\cancel{3}\cdot\ldots\cdot\cancel{(2n-1)}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2n+1}{2(n+1)} \Leftrightarrow 2(n+1)u_{n+1} = (2n+1)u_n.$$

(2) $$\frac{2n+1}{2(n+1)} = \frac{2n+1+1-1}{2n+2} = 1 - \frac{1}{2(n+1)} < 1 \ \forall n$$

donc par (1) : $u_{n+1} < u_n \ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc strictement décroissante

(3) $0 \leq u_n \leq u_1 = \frac{1}{2} \ \forall n \in \mathbb{N}^*$ donc (u_n) bornée.

(4) Toute suite monotone et bornée est convergente ; donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers une limite ℓ t.q. $0 \leq \ell \leq 1/2$

5.a Par récurrence : $n=1$: $0 \leq u_1 = \frac{1}{2} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$

Supposons $u_n \leq \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$ vraie. Multiplions par $\frac{2n+1}{2(n+1)}$ cette inégalité ; on a (cf.(1)) : $u_{n+1} \leq \frac{\sqrt{2n+1}}{2(n+1)}$.

Il suffit alors de m.q. $\frac{\sqrt{2n+1}}{2(n+1)} \leq \frac{1}{\sqrt{2n+3}}$, i.e. :

$(2n+1)(2n+3) \leq 4(n+1)^2 \Longleftrightarrow \cancel{4n^2}+\cancel{8n}+3 \leq \cancel{4n^2}+\cancel{8n}+4$

$\Longleftrightarrow 0 \leq 1$ VRAI $\forall n$.

5.b Par le Thm des gendarmes, en passant à la $\lim_{n\to\infty}$ dans $0 \leq u_n \leq \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$ on a : $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

EXERCICE 5 :

a Le théorème de division euclidienne avec reste nul, assure l'existence et l'unicité des polynômes Q_1 et Q_2 sous l'hypothèse "(HYP)".

b $P' = (P+1)' = ((X-1)^3 Q_1)' = (X-1)^2(3Q_1 + (X-1)Q_1')$

$P' = (P+2)' = (X^4 Q_2)' = X^3(4Q_2 + XQ_2')$

Donc $P' = (X-1)^2 A$ et $P' = X^3 B$

où $A, B \in \mathbb{R}[X]$, i.e. 1 est racine double de P' et 0 est racine triple de P'.

c De (b) il résulte que $(X-1)^2 | P'$ et $X^3 | P'$ donc $\exists C \in \mathbb{R}[X]$ t.q. $P' = X^3(X-1)^2 C$

d'où, m̂ si $d^\circ C = 0$, le degré de P' est au moins égal à celui de $X^3(X-1)^2$ donc 5.

Or le degré de P = degré de $P' + 1$, donc degré de $P \geq 5+1 = 6$.

d De (c) on a : $P' = cX^3(X-1)^2 = c(X^5 - 2X^4 + X^3)$ qu'on intègre pour trouver des poly. primitives P :

$P(x) = \int P'(x)dx = c\left(\frac{x^6}{6} - \frac{2x^5}{5} + \frac{x^4}{4}\right) + \lambda$ où $(c,\lambda) \in \mathbb{R}^2$ sont à trouver en imposant à ces P de vérifier (HYP) :

$$\left.\begin{array}{l} (P+1)(1) = 0 \Longleftrightarrow \frac{c}{6} - \frac{2c}{5} + \frac{c}{4} + \lambda + 1 = 0 \\ (P+2)(0) = 0 \Longleftrightarrow \lambda + 2 = 0 \Longleftrightarrow \lambda = -2 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow$$

$\Longleftrightarrow \lambda = -2$ et $10c - 24c + 15c = 60$ d'où $c = 60$.

Donc $P_0 = 10X^6 - 24X^5 + 15X^4 - 2$ est l'exemple recherché

À présent nous traitons les questions hors barème

EXO 5 **e*** $D = P - P_0 = (P+1) - (P_0+1) =$

$= (X-1)^3 Q_1 - (X-1)^3 \tilde{Q}_1 = (X-1)^3(Q_1 - \tilde{Q}_1)$

Donc $(X-1)^3 | D$. De même

$D = P - P_0 = (P+2) - (P_0+2) = X^4 Q_2 - X^4 \tilde{Q}_2$

$= X^4(Q_2 - \tilde{Q}_2)$

Donc $X^4 | D$.

Donc $(X-1)^3 X^4 | D$ i.e. $\exists Q \in \mathbb{R}[X]$ t.q.

$D = (X-1)^3 X^4 Q$

Donc

$$P = P_0 + D = P_0 + (X-1)^3 X^4 Q \quad (**)$$

Tous les "Donc" ci-dessus sont en fait des équivalences ce qui montre que P vérif.(HYP) $\Longleftrightarrow$ (**)

EXO 4 (Questions bonus : 6.a) & 6.b) :

(6.a)* Il s'agit de compléter les factorielles :

$$u_n = \frac{1\cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1)\cdot 2\cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2n)}{(2\cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2n))^2} = \frac{(2n)!}{(2^n \cdot n!)^2}$$

(6.b)* La formule de Stirling donne :

$$(2n)! = 2\sqrt{\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^{2n} \cdot 2^{2n}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$(n!)^2 = 2\pi n\left(\frac{n}{e}\right)^{2n}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)^2$$

Or $\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)^2 = 1+O\left(\frac{1}{n}\right)$ (car $O\left(\frac{1}{n}\right)=O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ qui $\to 0$ plus vite que $O\left(\frac{1}{n}\right)$)

Donc

$$\sqrt{n}\,u_n \overset{(6.a)}{=} \frac{\cancel{2\sqrt{\pi n}}\cancel{\left(\frac{n}{e}\right)^{2n}}\cdot \cancel{2^{2n}}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)\cdot\sqrt{n}}{\cancel{2\pi n}\cancel{\left(\frac{n}{e}\right)^{2n}}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)\cdot \cancel{2^{2n}}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\cancel{(\sqrt{n})^2}}{\cancel{n}}\,\frac{\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{1+O\left(\frac{1}{n}\right)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{\sqrt{\pi}} = \lambda$$

Donc $u_n = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ ce qu'on avait déjà vu à (5.a)

Plus encore, à partir d'un n assez grand on a : $\frac{1}{\sqrt{3n}} \le u_n \le \frac{1}{\sqrt{2n}}$ ce qui cadre avec $2<\pi<3$.

Questions & application du cours (Questions bonus e), f), g))

(e) **VRAI** : En effet : $X^{n+1}-1 = (X-1)(X^n+\ldots+1) = (X-1)P_n$

Donc les racines de P_n sont les n racines $(n+1)$-èmes de l'unité, sauf $x_0 = 1$. Or $z^{n+1}-1=0 \Leftrightarrow z^{n+1}=1 \Rightarrow |z|=1$

Donc toutes les racines sont à égale distance de l'origine, à savoir 1.

(f) **VRAI** : Ceci est vrai non seulement pour X^4+i mais pour tout polynôme de la forme X^4-w où $w\in\mathbb{C}$. En effet, si $w=|w|e^{i\theta}$, pour $k=0,1,2,3$: les solutions de $z^4=w$ sont,

$$z_k = \sqrt[4]{|w|}\cdot e^{i\left(\frac{\theta}{4}+\frac{2k\pi}{4}\right)} = \sqrt[4]{|w|}\,e^{i\frac{\theta}{4}}\cdot e^{\frac{k\pi}{2}}.$$

donc $z_0 = \sqrt[4]{|w|}\,e^{i\frac{\theta}{4}} = -z_2$ sont affixes de points se trouvant sur une droite vectorielle de pente $\operatorname{tg}\theta$ alors que

$z_1 = iz_0 = -z_3$ se trouvent sur la perpendiculaire ~~à~~ celle-ci, de pente $\cancel{\tan}\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)$.

(g) **FAUX** : Supposons (par l'absurde) qu'une telle suite existait. Alors elle serait (strictement) décroissante, et comme $\forall n\in\mathbb{N}^*$: $0\le u_n<1$ elle est bornée $\Rightarrow (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers un $\ell\in\mathbb{R}$ qui vérifie : $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)\le \ell\le 1$

i.e. $\ell=1$. Donc : (comme $u_n\le 1$ $\forall n$)

$\forall\varepsilon>0$ $\exists N_\varepsilon$ t.q. $n\ge N_\varepsilon \Rightarrow 1-\varepsilon<u_n\le 1$. (*)

Par ailleurs, comme (u_n) est décroissante, son plus grand él. est $u_0\le 1$ et on a $u_1 \lneq u_0$. Posons alors $\alpha = \frac{u_0+u_1}{2}$. On a :

$u_1 \lneq \alpha \lneq u_0$ et si on choisit dans (*) $\varepsilon = 1-\alpha$ alors $\forall n\ge 1$ on a :

$u_n < u_1 < 1-\varepsilon < u_0$

Contradiction avec (*)